... curiosi polinomi di quarto grado

Stabilire se esistono polinomi p(x) di quarto grado tali che nei punti di ascissa intera sia intero sia il valore di p(x) che il valore della sua derivata p'(x). In caso affermativo determinare tutti polinomi.
(N.B. I coefficienti di p(x) non sono necessariamente interi).

E' noto dall'algebra che i polinomi P(x) che assumono valori interi nei punti di ascissa intera (polinomi **a valore intero** - **integer valued** polynomials) sono esprimibili come combinazione lineare a coefficienti interi delle funzioni binomiali C(x,k).
Il polinomio a valore intero di grado n è quindi esprimibile come

(1) $$P(x)=\sum_{0}^{n} A_k \; C(x,k)$$

con $A_1\ A_2 \ldots A_k$ interi, $A_n \neq 0$ e

(2) $$C(x,k)=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!}$$

I coefficienti di P(x) sono sempre razionali (o interi).

Il generico polinomio a valore intero di 4° grado assume quindi la forma

(2) $$P(x) = a\ C(x,4) + b\ C(x,3) + c\ C(x,2) + d\ C(x,1) + e\ C(x,0)$$

con a, b, c, d, e interi e $a \neq 0$

La derivata P'(x) può essere espressa facilmente mediante le funzioni binomiali C(x,k) utilizzando le relazioni

$$\frac{d\,C(x,1)}{dx}=1 \qquad \frac{d\,C(x,2)}{dx}=C(x,1)-\frac{1}{2}$$

$$\frac{d\,C(x,3)}{dx}=C(x,2)-\frac{1}{2}C(x,1)+\frac{1}{3} \qquad \frac{d\,C(x,4)}{dx}=C(x,3)-\frac{1}{2}C(x,2)+\frac{1}{3}C(x,1)-\frac{1}{4}$$

Derivando la (3) e usando le espressioni precedenti si ha

(4) $$P'(x)=aC(x,3)+\left(b-\frac{a}{2}\right)C(x,2)+\left(c-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}\right)C(x,1)+\left(d-\frac{c}{2}+\frac{b}{3}-\frac{a}{4}\right)$$

P'(x) è anch'esso un polinomio a valore intero se è una combinazione lineare a coefficienti interi delle funzioni binomiali, cioè se i coefficienti delle C(x,k) che figurano nella (4) sono interi. Un semplice esame consente di determinare a vista che ciò avviene quando

a è divisibile per 12

b è divisibile per 6
c è divisibile per 2
d è intero
e è intero

Il polinomio di 4° grado che, unitamente alla sua derivata, assume valori interi in corrispondenza di punti di ascissa intera ha quindi la struttura seguente

(5) $$P(x) = 12\,h\,C(x,4) + 6\,k\,C(x,3) + 2\,i\,C(x,2) + l\,C(x,1) + m\,C(x,0)$$

con h, k, i, l, m interi e $h \neq 0$

Evidenziando le potenze di x P(x) e P'(x) assumono la forma

(6) $$P(x) = \frac{h}{2}x^4 - (3h - k)\,x^3 + \frac{11h - 6k + 2i}{2}\,x^2 + (3h - 2k + i - l)\,x + m$$

(7) $$P'(x) = 2h\,x^3 - 3(3h - k)\,x^2 + (11h - 6k + 2i)\,x - (3h - 2k + i - l)$$

con h, k, i, l, m interi e $h \neq 0$

Da notare che P'(x) ha sempre coefficienti interi.

Concludendo:

esistono polinomi a valore intero di quarto grado P(x) la cui derivata P'(x) è anch'essa polinomio a valore intero. P(x) ha la struttura indicata in (6), con h, k, i, l, m interi e $h \neq 0$. P'(x) ha sempre coefficienti interi.