PROBLEMA DI OTTOBRE 2004

Indichiamo con S l'insieme dei polinomi di quarto grado P(x) tali che:
$\forall n \in \mathbf{Z}$ $P(n) \in \mathbf{Z}$ e $P'(n) \in \mathbf{Z}$ **.** Proveremo la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE

$P(x) \in S$ sse $P(x) \equiv \dfrac{h\,x^2(x-1)^2}{4} + k\,x^3 + l\,x^2 + d\,x + e$ con h, k, l, d, e $\in \mathbf{Z}$ e $h \neq 0$

Dim.

Se $P(x) \in S$ allora $P(x) \equiv a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$ con $a \neq 0$ e
$\forall n \in \mathbf{Z}$ $P(n) = a\,n^4 + b\,n^3 + c\,n^2 + d\,n + e \in \mathbf{Z}$, $P'(n) = 4\,a\,n^3 + 3\,b\,n^2 + 2\,c\,n + d \in \mathbf{Z}$
In particolare si ha:

- $P(0) = e \in \mathbf{Z}$;
- $P'(0) = d \in \mathbf{Z}$;
- $P(1) - P(-1) = 2b + 2d \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2b \in \mathbf{Z}$ (segue dal fatto che $d \in \mathbf{Z}$) ;
- $2\,P'(1) - 4\,P(1) = 4a + 2b - 2d - 4e \in \mathbf{Z} \Rightarrow 4a \in \mathbf{Z}$ (segue dal fatto che 2b, d, e $\in \mathbf{Z}$)

  $\Rightarrow a = \dfrac{h}{4}$ con $h \in \mathbf{Z}$ e $h \neq 0$
- $3\,P(1) - P'(1) = c - a + 2d + 3e \in \mathbf{Z} \Rightarrow c - a \in \mathbf{Z}$ (segue dal fatto che d, e $\in \mathbf{Z}$)

  $\Rightarrow c = a + l = \dfrac{h}{4} + l$ con $l \in \mathbf{Z}$
- $P'(1) - 2\,P(1) = 2a + b - d - 2e \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2a + b \in \mathbf{Z}$ (segue dal fatto che d, e $\in \mathbf{Z}$)

  $\Rightarrow b = -2a + k = -\dfrac{h}{2} + k$ con $k \in \mathbf{Z}$

Ne segue che:

$$P(x) \equiv a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e \equiv \frac{h}{4}\,x^4 + \left(-\frac{h}{2} + k\right)x^3 + \left(\frac{h}{4} + l\right)x^2 + d\,x + e \equiv$$

$$\equiv \frac{h\,x^2(x-1)^2}{4} + k\,x^3 + l\,x^2 + d\,x + e \quad \text{con h, k, l, d, e} \in \mathbf{Z} \quad \text{e } h \neq 0$$

Viceversa sia $P(x) \equiv \dfrac{h\,x^2(x-1)^2}{4} + k\,x^3 + l\,x^2 + d\,x + e$ con h, k, l, d, e $\in \mathbf{Z}$ e $h \neq 0$.
Osservando che $\forall n \in \mathbf{Z}$**,**   n oppure $n-1$ è pari, e quindi n^2 oppure $(n-1)^2$ è multiplo di 4,
si ha che: $P(n) = \dfrac{h n^2(n-1)^2}{4} + k\,n^3 + l\,n^2 + d\,n + e \in \mathbf{Z}$

Calcolando la derivata prima di P(x) si ottiene:

$$P'(x) \equiv \frac{h\,\left(2\,x\,(x-1)^2 + x^2\;2(x-1)\right)}{4} + 3\,k\,x^2 + 2\,l\,x + d \equiv$$

$$\equiv \frac{h\,x\,(x-1)\,(2x-1)}{2} + 3\,k\,x^2 + 2\,l\,x + d$$

Osservando che $\forall n \in \mathbf{Z}$**,**   n oppure $n-1$ è pari, si ha che:

$P'(n) = \dfrac{hn\,(n-1)\,(2n-1)}{2} + 3\,k\,n^2 + 2\,l\,n + d \in \mathbf{Z}$.