ALCUNE OSSERVAZIONI DI MAURIZIO CASTELLAN SUL PROBLEMA DI OTTOBRE 2004

Mi sembra che la caratterizzazione di Bernardini dei polinomi cercati non sia completa.

Ad esempio sia il polinomio di quarto grado:

$$P(x) \equiv \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} \equiv \frac{x^2(x-1)^2}{4}$$

che la sua derivata prima

$$P'(x) \equiv x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \equiv \frac{x(x-1)(2x-1)}{2}$$

assumono valori interi per ogni valore intero di x; ma P(x) non è esprimibile nella forma:

$$P(x) \equiv \frac{h}{2}x^4 - (3h-k)x^3 + \frac{11h-6k+2i}{4}x^2 + (3h-2k+i-l)x + m$$

per nessun h, k, i, l, m interi ($h \neq 0$).

La condizione indicata da Bernardini è sufficiente ma non necessaria; ciò è dovuto al fatto che se a, b, c, d sono interi:

la condizione

- a divisibile per 12
- b divisibile per 6
- c divisibile per 2
- d intero

è sufficiente ma non necessaria affinchè

$a,\quad b - \frac{a}{2}\ ,\quad c - \frac{b}{2} + \frac{a}{3}\ ,\quad d - \frac{c}{2} + \frac{b}{3} - \frac{a}{4}$ siano interi

Se non mi sono sbagliato a fare i conti la condizione necessaria e sufficiente dovrebbe essere:

- a divisibile per 6
- b divisibile per 6
- 2c+a divisibile per 4
- d intero