MAURIZIO CASTELLAN- PROBLEMA SETTEMBRE 2004

Osserviamo prima di tutto che il gioco in questione è finito e non ammette pareggi. Ne segue che in una qualsiasi fase di gioco se un giocatore ha una probabilità P di vincere allora l'altro ha una probabilità di successo 1 − P.

Chiamiamo ora <u>terminali</u> i lanci del dado che determinano la fine della partita (esempio: in una partita con la sequenza di risultati: 2 – 3 – 5 – 3 il quarto lancio è terminale).

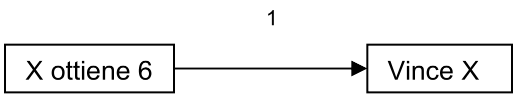
La probabilità di vincere per un giocatore che fa un lancio terminale vale ovviamente 0; nel caso di un lancio non terminale nel quale si ottiene n, la probabilità di vittoria vale invece:

$$P(n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{6-n} \qquad (n=1,...,6)$$

Proviamo l'affermazione ricorsivamente.

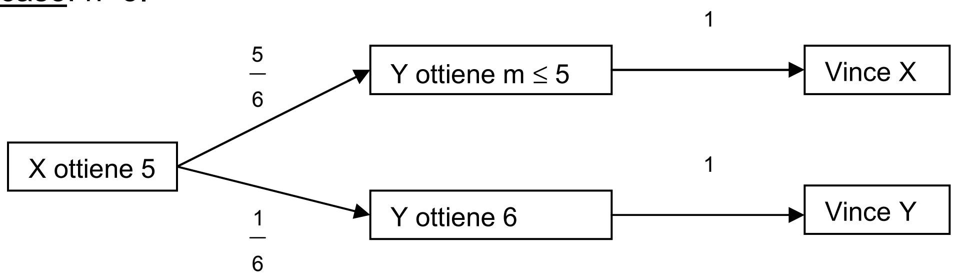
Indichiamo con X il giocatore che fa il lancio non terminale e Y l'altro. Schematizziamo le diverse situazioni con alberi (il numero sull'arco orientato che unisce due nodi consecutivi indica la probabilità dell'evento associato al secondo nodo condizionato dal verificarsi dell'evento associato al primo nodo)

<u>1° caso</u>: n=6.



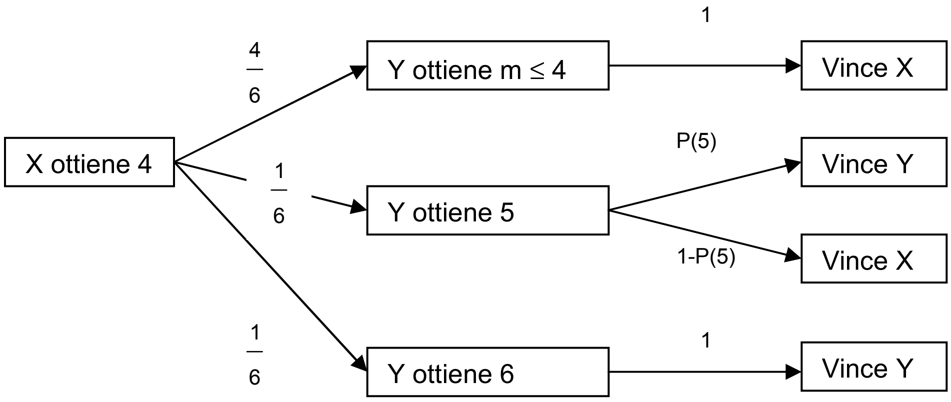
$$P(6) = 1= \left(\frac{5}{6}\right)^{6-6}$$

<u>2° caso</u>: n=5.



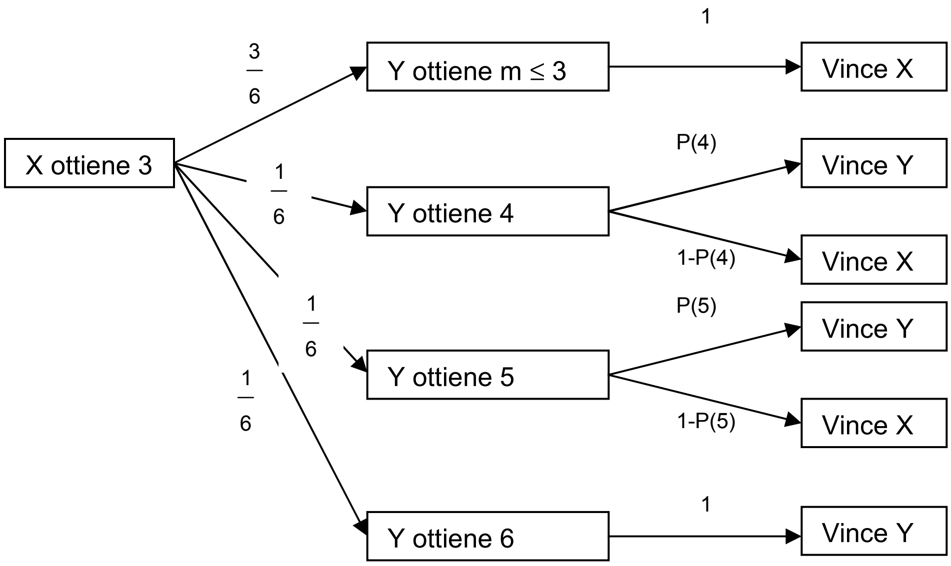
$$P(5) = \frac{5}{6}\cdot 1 = \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{6-5}$$

3° caso: n=4.



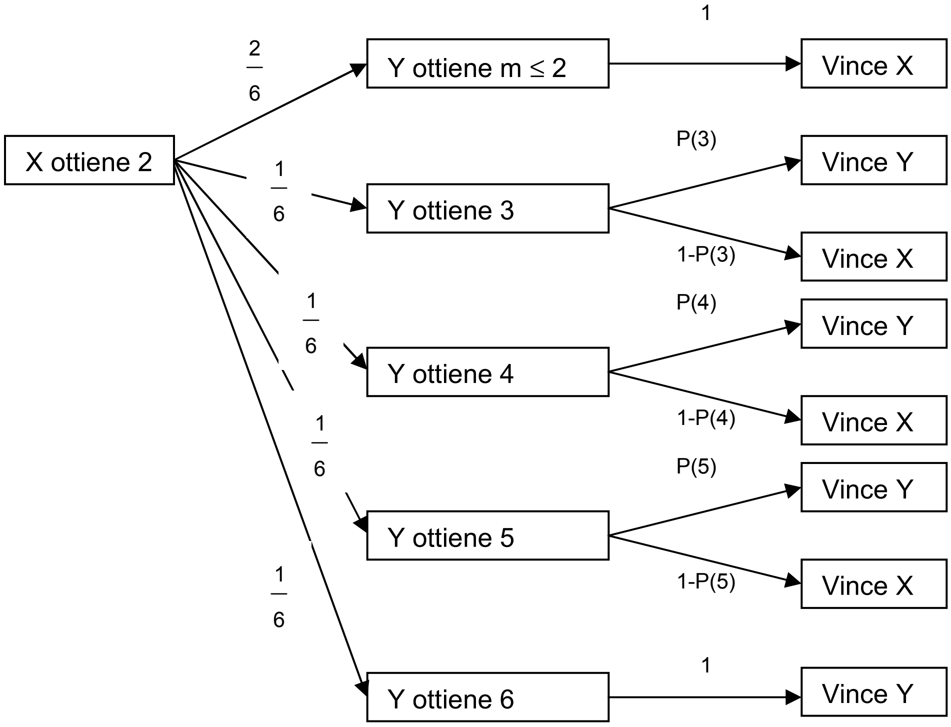
$$P(4) = \frac{4}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}(1-P(5))=\frac{4}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\left(1-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{6-4}$$

4° caso: n=3.



$$P(3) = \frac{3}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}(1-P(4))+\frac{1}{6}(1-P(5))=\frac{3}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{6-3}$$

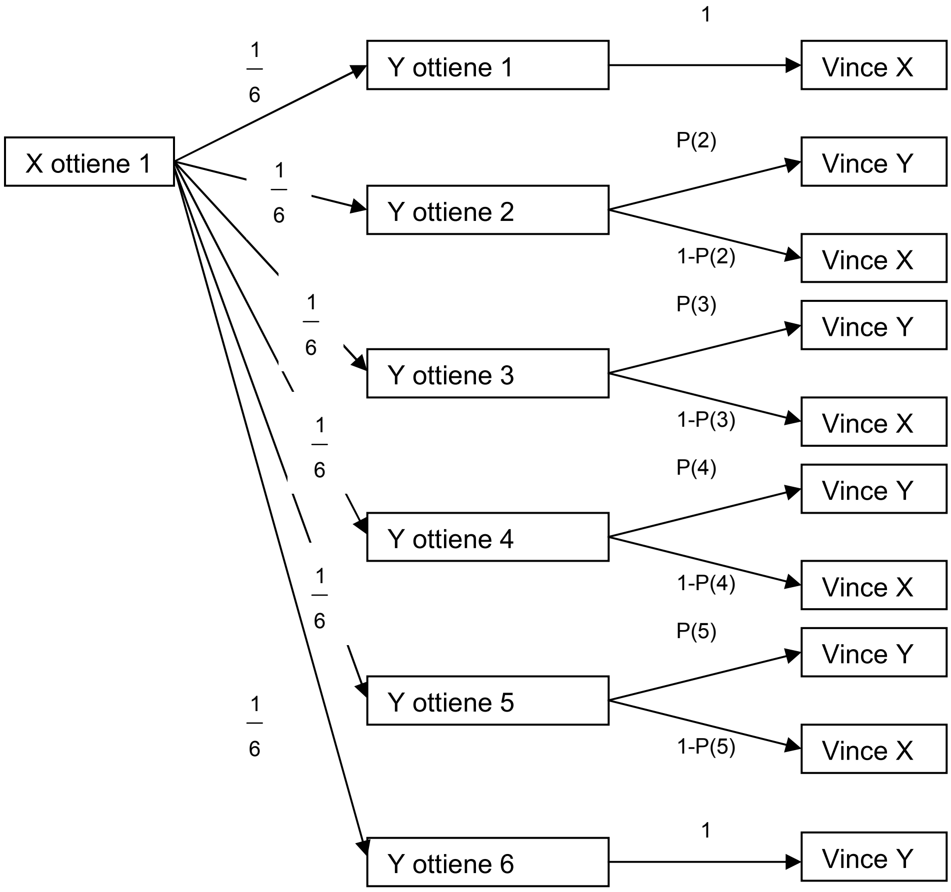
5° caso: n=2.



$$P(2) = \frac{2}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}(1-P(3))+\frac{1}{6}(1-P(4))+\frac{1}{6}(1-P(5)) =$$

$$=\frac{2}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{6-2}$$

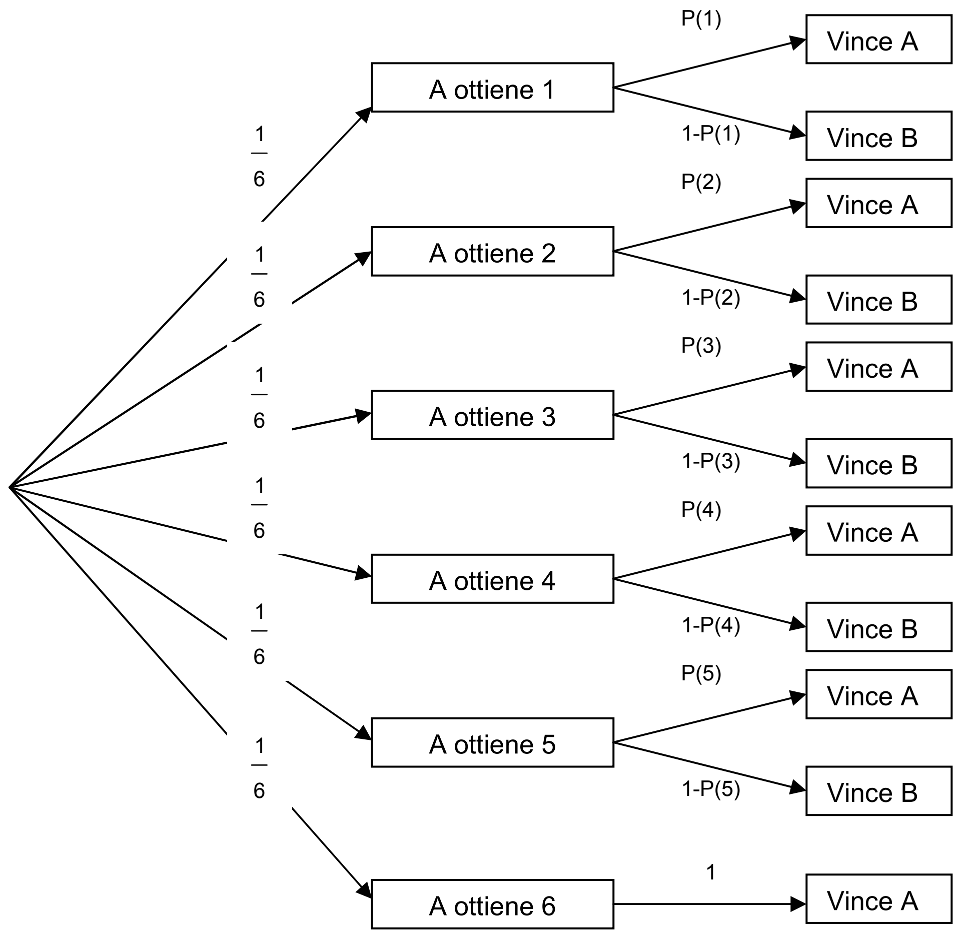
6° caso: n=1.



$$P(1) = \frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}(1-P(2))+\frac{1}{6}(1-P(3))+\frac{1}{6}(1-P(4))+\frac{1}{6}(1-P(5))=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{4}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^{6-1}$$

Sia ora A il giocatore che inizia il gioco e B il secondo giocatore.
I lanci iniziali del primo giocatore non sono terminali, possiamo quindi schematizzare l'intero quadro delle partite nel seguente modo:



Da cui si ottiene la probabilità di vittoria del giocatore A richiesta:

$$P = \frac{1}{6}\cdot P(1)+\frac{1}{6}\cdot P(2)+\frac{1}{6}\cdot P(3)+\frac{1}{6}\cdot P(4)+\frac{1}{6}\cdot P(5)+\frac{1}{6}\cdot P(6)=\frac{1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{6}P(i)=\frac{1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{6-i} =$$

$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6} \cong 0,67$$