LICEO SCIENTIFICO SUPPLETIVA 2000 - PROBLEMA 3

Si consideri la successione di termine generale $a_n = \frac{f(n)}{3^n}$ *, dove:*

$$f(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

a)

Dimostrare che $f(n) = 2^n$.

Basta applicare lo sviluppo del binomio di Newton con a=1 e b=1.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n \binom{n}{n}$$

Con a=1 e b=1 abbiamo:

$2^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n \binom{n}{n}$ c.v.d.

b)

Determinare il più piccolo valore di n per cui risulta: $a_n < 10^{-10}$.

Risulta:

$$a_n = \frac{f(n)}{3^n} = a_n = \frac{2^n}{3^n} < 10^{-10} \;\; se \;\; \log_{10} \frac{2^n}{3^n} < \log_{10}(10^{-10}) \, , \log_{10} 2^n - \log_{10} 3^n < -10 \, ,$$

$$n \log_{10} 2 - n \log_{10} 3 < -10 \;\; , \;\; n(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) < -10 \;\; , \qquad n(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) > 10 \, ,$$

$$n > \frac{10}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} \cong 56.8 \, .$$

Quindi il più piccolo valore di n per cui risulta $a_n < 10^{-10}$ è $n = 57$.

N.B.

Per n=56 risulta $a_n = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{56} \cong 1.4 \cdot 10^{-10} > 10^{-10}$, per n=57 si ha

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{57} \cong 9.2 \cdot 10^{-11} < 10^{-10}$$

c)

Spiegare perché, se n è dispari, risulta:

$$f(n) = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n-1)/2}\right],$$

fornendo la dimostrazione di ogni eventuale formula cui si fa ricorso.
Scrivere un'espressione equivalente di $f(n)$ quando n è pari.

Se n è dispari l'espressione $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$ contiene un numero pari di addendi; per esempio se n=3 abbiamo: $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} + \binom{3}{3}$. Osserviamo che:

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n-1)/2}$ contiene la metà dei termini di $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$.

Infatti dalla nota proprietà $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ segue che:

$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{n - \frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$$

Il termine successivo a $\binom{n}{(n-1)/2}$ è: $\binom{n}{\frac{n-1}{2}+1} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$, quindi i termini della somma $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ sono tanti quanto i termini della somma: $\binom{n}{\frac{n+1}{2}} + \cdots + \binom{n}{n}$. Ma per una nota proprietà della potenza del binomio i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi sono uguali. Questa proprietà deriva dalla già menzionata proprietà: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Possiamo quindi concludere che $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \frac{f(n)}{2}$. Da ciò segue che:

$$f(n) = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n-1)/2}\right], \qquad c.v.d.$$

Esempio con n=3:

$$f(n) = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 = 8$$

$$f(n) = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n-1)/2}\right] = 2\left[\binom{3}{0} + \binom{3}{1}\right] 2(1+3) = 8$$

Si chiede di dimostrare le formule utilizzate, quindi dimostriamo che:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dalla definizione del coefficiente binomiale (che individua le combinazioni semplici di n oggetti a k a k) si ha che:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Quindi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Si chiede poi di dimostrare una formula analoga nel caso di n pari.

I termini della somma $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$ sono in numero dispari (n+1).
Il termine centrale di tale somma ne ha tanti a sinistra quanto a destra, in particolare:

$\frac{n}{2}$ a sinistra ed $\frac{n}{2}$ a destra $\left(\frac{n}{2} + 1 + \frac{n}{2} = n + 1\right)$.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} + \binom{n}{\frac{n}{2}} + \binom{n}{\frac{n}{2}+1} \ldots + \binom{n}{n}$$

Risulta pertanto:

$$f(n) = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{\frac{n}{2}-1}\right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} + \left[\binom{n}{\frac{n}{2}+1} + \cdots + \binom{n}{n}\right].$$

Siccome, come osservato in precedenza i termini estremi e quelli equidistanti dagli estremi sono uguali avremo:

$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{\frac{n}{2}-1}\right] = \left[\binom{n}{\frac{n}{2}+1} + \cdots + \binom{n}{n}\right]$. Quindi:

$$f(n) = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{\frac{n}{2}-1}\right] + \binom{n}{\frac{n}{2}} = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} + \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right]$$

Concludendo, per n pari si ha:

$$f(n)=2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{\frac{n}{2}-1}+\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right]$$

Esempio con $n=4$:

$$f(n)=\left[\binom{4}{0}+\binom{4}{1}\right]+\binom{4}{2}+\left[\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right]=2^4=16$$

$$f(n)=2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{\frac{n}{2}-1}+\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right]=2\left[\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\frac{1}{2}\binom{4}{2}\right]=$$

$$=2[1+4+3]=16.$$

d)

Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$ e, ricorrendo alla definizione, verificare il limite così trovato.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

La definizione di successione convergente è la seguente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=l\ \ se{:}\ \forall\varepsilon>0\ \exists\, n_0=n_0(\epsilon)\in\mathbb{N}{:}\ |a_n-l|<\epsilon\ \ \forall n\geq n_0$$

Nel nostro caso:

$$|a_n-l|=\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n-0\right|<\epsilon\,,\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^n<\epsilon,\ \ \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n<\ln\epsilon\ ,\qquad n\ln\left(\frac{2}{3}\right)<\ln\epsilon\,, n>\frac{\ln\epsilon}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

e prendendo $\boldsymbol{n_0}\geq\left[\frac{\mathbf{ln}\,\boldsymbol{\epsilon}}{\mathbf{ln}\left(\frac{2}{3}\right)}\right]+\mathbf{1}$ la definizione è verificata.

N.B. con $\left[\frac{\ln\epsilon}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right]$ si intende “la parte intera” di $\frac{\ln\epsilon}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$.

e)

Esiste $\lim_{n\to 10^{10}} a_n$? Motivare esaurientemente la risposta.

Il limite di una successione si può calcolare solo se $n\to+\infty$. Non ha senso calcolare il limite per $n\to l$ perché l non è punto di accumulazione per il dominio di a_n, che è fatta tutta da punti isolati. Quindi il $\lim_{n\to 10^{10}} a_n$ NON HA SENSO.

Con la collaborazione di Angela Santamaria