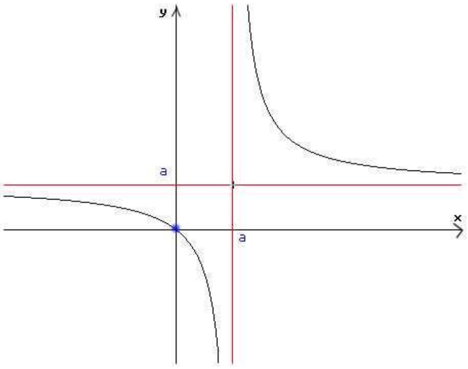
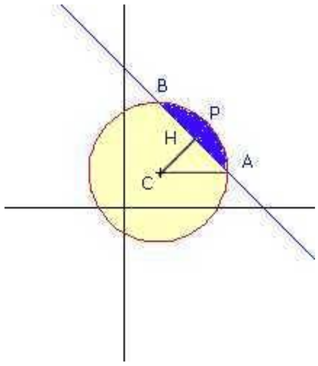
ORDINAMENTO 2001 - PROBLEMA 1

a) Si ottiene $y = \dfrac{ax}{x-a}$ che è una funzione omografica passante per l'origine degli assi cartesiani (che non fa parte del grafico richiesto perché nell'espressione data si deve imporre che x ed y siano diversi da zero) con asintoti le rette di equazione **x = a** e **y = a**.



b) Facendo sistema tra l'equazione dell'iperbole e quella della retta data si ottiene l'equazione risolvente: $\mathbf{x^2 - 4x + 4a = 0}$. Ci sono due soluzioni coincidenti per **a = 1** (la retta è tangente all'iperbole) e due soluzioni distinte per **0 < a < 1** (in tal caso la retta è secante; si ricordi che a > 0).

c)



La corda AB deve avere lunghezza uguale a $2\sqrt{2}$. Calcolo CH come distanza del centro della circonferenza dalla retta data: si ottiene $\sqrt{2}$. Il raggio della circonferenza si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo ACH (AH è la metà di AB, quindi misura $\sqrt{2}$):

$r = \overline{CA} = 2$. La circonferenza richiesta ha quindi equazione:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

d) Il segmento circolare APB si ottiene per differenza tra il settore circolare CAPB ed il triangolo ABC. Si noti che AB è il lato del quadrato inscritto nella circonferenza essendo la sua misura $2\sqrt{2} = r\sqrt{2}$.

Area settore CAPB = 1/4 Area cerchio = $\frac{1}{4}\pi(2^2) = \pi$

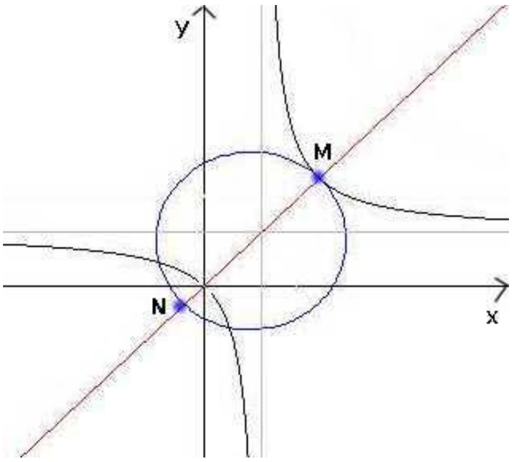
Area triangolo ABC = $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

Area segmento circolare APB = $\pi - 2$

La seconda area richiesta si ottiene per differenza tra l'area del cerchio e la prima area:

Area2 = $4\pi - Area1 = 4\pi - (\pi - 2) = 3\pi + 2$

e)



Siccome il centro della circonferenza ed il centro dell'iperbole appartengono alla retta di equazione **y = x** , gli eventuali punti di tangenza sono gli estremi del diametro della circonferenza appartenente a tale retta, quindi si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$M(\sqrt{2}+1; \sqrt{2}+1) \quad N(1-\sqrt{2}; 1-\sqrt{2})$$

L'iperbole passa per M se $a = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ che è soluzione accettabile, passa per N se $a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ che non è accettabile perché minore di zero.