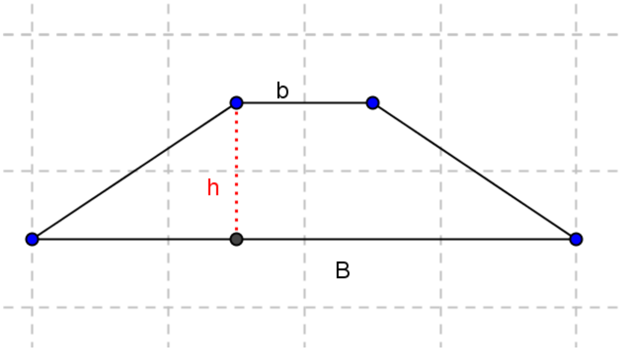
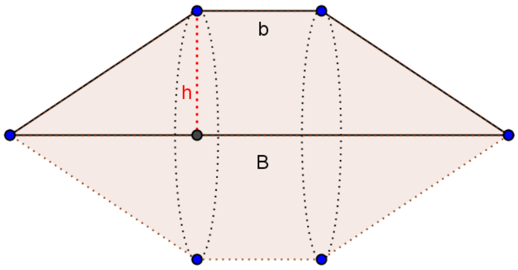
ORDINAMENTO 2002

QUESITO 1

B= base maggiore, b= base minore, h= altezza, B= 4b



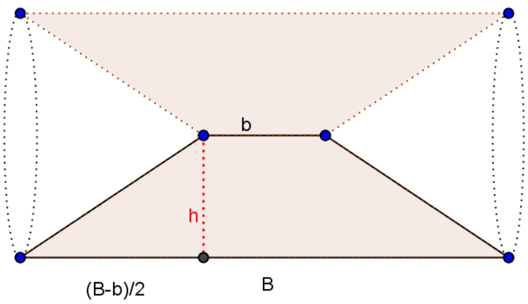
Consideriamo il solido ottenuto facendo ruotare il trapezio di un giro completo intorno alla base maggiore:



Il suo volume è dato dalla somma dei volumi dei due coni con raggio di base h e altezza (B-b)/2 e del cilindro con raggio di base h e altezza b:

$$V_1 = \pi h^2 b + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\pi h^2 \left(\frac{B-b}{2}\right)\right) = \cdots = 2\pi h^2 b$$

Consideriamo il solido ottenuto facendo ruotare il trapezio di un giro completo intorno alla base minore:



Il suo volume è dato dalla differenza del volumi del cilindro con raggio di base h e altezza B ed il volume dei due coni con raggio di base h e altezza due conidi due coni con raggio di base h e altezza (B-b)/2 e del cilindro con raggio di base h e altezza (B-b)/2:

$$V_2 = \pi h^2 B - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi h^2 \left(\frac{B-b}{2} \right) \right) = \cdots = 3\pi h^2 b$$

Quindi: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi h^2 b}{3\pi h^2 b} = \frac{2}{3}$

QUESITO 2

Due tetraedri regolari sono simili. Siccome il rapporto fra le aeree è 2, il rapporto di similitudine è $\sqrt{2}$. Il rapporto fra i volumi è il cubo del rapporto di similitudine, quindi:

$$\frac{V'}{V''} = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

QUESITO 3

Consideriamo i numeri reali a, b, c, d tali che a>b e c>d.

Se a>b e c>d, sommando membro a membro abbiamo: a+c>b+d, da cui:
a-d>b-c: la risposta corretta è quindi la B.
La A è falsa: prendere per esempio a=7 e b=6.
La C è falsa: prendere a=3 e b=2.
La D è falsa: prendere c=4 e d= - 5.

QUESITO 4

Siano a>0 e b>0.
Media aritmetica: $\frac{a+b}{2}$
Media geometrica: $\sqrt{a \cdot b}$

La proposizione è falsa. Infatti:

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} \implies (a+b)^2 > 4ab \implies (a-b)^2 > 0$ che è falsa se a=b.
In effetti la media aritmetica di due numeri reali positivi è maggiore o uguale alla media geometrica dei due numeri, non maggiore.

QUESITO 5

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2 - 2x - 3}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x - 3}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{x + 1}}$$

È un'identità se:

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}=\frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}$$

Quindi se: $1=x(a+b)+a-3b$.
Quest'ultima, per il *Principio di identità dei polinomi*, è un'identità se:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-3b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

QUESITO 6

Consideriamo la funzione di equazione: $f(x)=(2x-1)^2(4-2x)^5$*: stabilire se ammette massimo o minimo assoluto nell'intervallo:* $\frac{1}{2}\le x\le 2$.

Nell'intervallo indicato 2x-1 e 4-2x sono positivi o nulli.
Il minimo assoluto quindi è 0 (per $x=\frac{1}{2}$ oppure per $x=2$)
Stabiliamo se c'è massimo assoluto.

Per via elementare

Siccome la somma delle basi (2x-1 e 4-2x) è costante, il prodotto delle due potenze è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti, cioè quando:

$$\frac{2x-1}{2}=\frac{4-2x}{5} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{11}{8}$$

Il massimo assoluto della funzione è quindi $f\left(\frac{11}{8}\right)=\frac{187}{20}$

Metodo delle derivate

$f(x)=(2x-1)^2(4-2x)^5$
Tale funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $\frac{1}{2}\le x\le 2$. Quindi *per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto.*
Il massimo ed il minimo sono da ricercarsi tra i valori agli estremi, i valori che annullano la derivata prima e gli eventuali punti di non derivabilità (che nel nostro caso non ci sono).

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ \ f(2)=0$$

$f'(x)=2(2x-1)^6(4-2x)^4(33-24x)=0$ se $x=\frac{1}{2},\ x=2,\ x=\frac{11}{8}$
Siccome $f\left(\frac{11}{8}\right)>0, avremo$:
il minimo assoluto per $x=\frac{1}{2}$ oppure per $x=2$ (che vale 0)
il massimo assoluto per $x=\frac{11}{8}$ (che vale $\frac{187}{20}$).

QUESITO 7

Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, dt, \qquad \text{con } x>0$$

Posto a>0, risulta: $f(x) = \int_x^a \ln t \, dt + \int_a^{x+1} \ln t \, dt = -\int_a^x \ln t \, dt + \int_a^{x+1} \ln t \, dt$
Ricordiamo che, se $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$ risulta $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, quindi:

$$f'(x) = D\left(-\int_a^x \ln t \, dt + \int_a^{x+1} \ln t \, dt\right) = -\ln x + (\ln(x+1)) \cdot 1 = ln\frac{x+1}{x}$$

QUESITO 8

La funzione reale di variabile reale f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1;3] e derivabile nell'intervallo aperto (1,3). Si sa che f(1)=1 e inoltre $0 \le f'(x) \le 2$ *per ogni x dell'intervallo (1;3). Spiegare in maniera esauriente perché risulta* $1 \le f(3) \le 5$.

Per il Teorema di Lagrange (le cui ipotesi sono soddisfatte dalla funzione nell'intervallo [1;3], abbiamo:

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = f'(c)$, con $c \in (1;3) \implies \frac{f(3)-1}{2} = f'(c)$; poiché $0 \le f'(c) \le 2$, risulta:

$$0 \le \frac{f(3)-1}{2} \le 2 \implies 0 \le f(3) - 1 \le 4 \implies 1 \le f(3) \le 5$$

QUESITO 9

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione: $y = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$

Dobbiamo dire da che cosa è costituito il luogo.

L'equazione del luogo ha come insieme di definizione:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 1 - x^2 \ge 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \le -1; x \ge 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \implies x = -1, \; x = 1$$

Il luogo è quindi costituito solo dai punti (-1;0), (1;0): RISPOSTA B

QUESITO 10

La funzione reale di variabile reale f(x), continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = a \qquad\qquad \int_0^6 f(x)\,dx = b$$

dove a, b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \qquad \textit{e} \qquad \int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4$$

Poniamo $2x = t$ da cui: $x = \frac{1}{2}t, \quad dx = \frac{1}{2}dt$
Se x=0, t=0; se x=3, t=6, se x=1, t=2

$$\ln 2 = \int_0^3 f(2x)dx = \int_0^6 f(t)\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{2}b \implies b = 2\ln 2$$

$$\ln 4 = \int_1^3 f(2x)dx = \int_2^6 f(t)\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int_2^6 f(t)dt \implies \int_2^6 f(t)dt = 2\ln 4$$

$\int_0^6 f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^6 f(t)dt = a + 2\ln 4 = b = 2\ln 2$, da cui

$$a = 2\ln 2 - 2\ln 4 = 2\,ln2 - 4\ln 2 = -2\ln 2$$