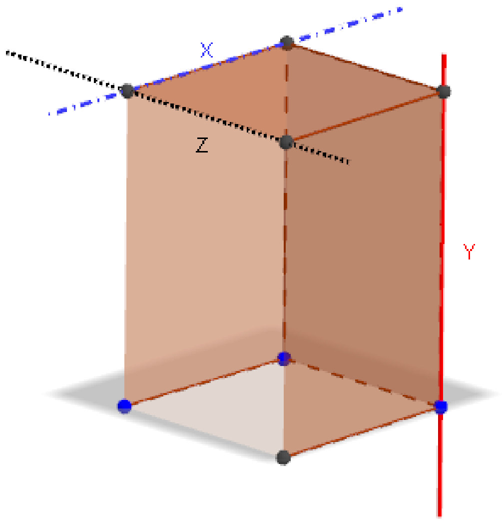
ORDINAMENTO 2003

QUESITO 1

Due rette si dicono sghembe se non giacciono nello stesso piano.

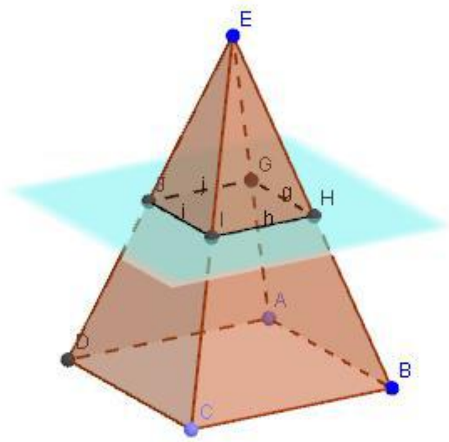
La proposizione è **falsa**.

Considerando, ad esempio, le rette contenenti gli spigoli x, y e z del parallelepipedo rettangolo indicato in figura, si osserva che x è sghemba con y, y è sghemba con z, ma x e non è sghemba con z (è incidente, quindi complanare).

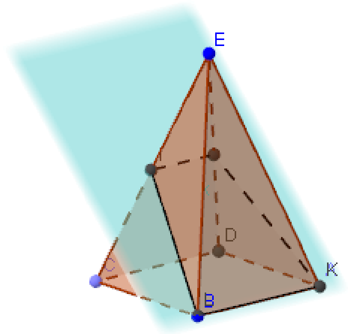


QUESITO 2

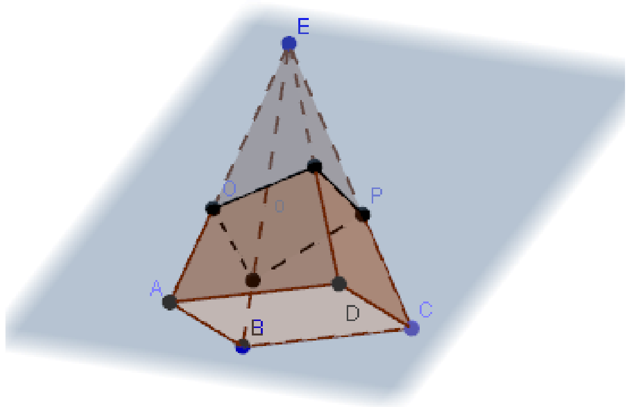
Se il piano è parallelo alla base della piramide la sezione è un **quadrato**.



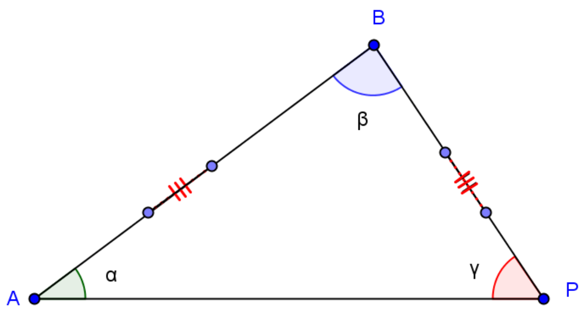
Se il piano è parallelo ad uno dei lati del quadrato di base la sezione è un trapezio isoscele.



Negli altri casi si ottiene un quadrilatero generico.



QUESITO 3



La distanza AP è misurabile direttamente.
Poiché da A sono visibili B e P, l'angolo BAP è misurabile: indichiamolo con α. Poiché da P sono visibili A e B, l'angolo BPA è misurabile: indichiamolo con γ.
Risulta quindi: $\mathrm{ABP}=\pi-(\alpha+\gamma)$, misurabile.
Nel triangolo ABP sono perciò misurabili un lato (AP) e gli angoli.

Si può quindi applicare il Teorema dei seni per trovare gli altri lati. In particolare:

$$\frac{AB}{sen\,\gamma}=\frac{AP}{sen\,\beta} \quad \Longrightarrow \quad AB=\frac{AP\ sen\,\gamma}{sen\,\beta}$$

QUESITO 4

Dobbiamo determinare il dominio della funzione di equazione:

$$\boldsymbol{f(x) = ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}}$$

Il dominio di questa funzione si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} > x-1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1} > x-1 \implies \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < x < 3 \end{cases} \implies -1 \leq x < 1 \ \cup \ 1 \leq x < 3 \implies \boldsymbol{-1 \leq x < 3}$$

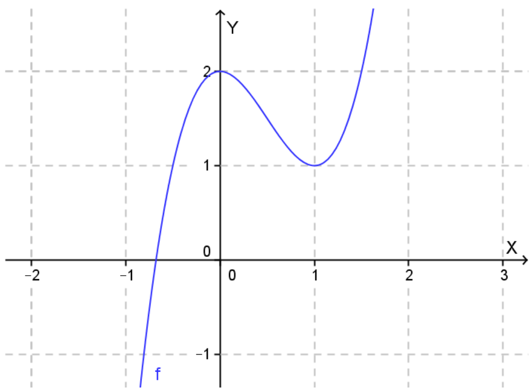
Quindi la risposta corretta è la **B.**

QUESITO 5

$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2}$

Dobbiamo dimostrare che la funzione ha un solo zero e stabilire il suo segno.

Si tratta di una funzione polinomiale, quindi è sempre continua.
Il limite al + infinito è + infinito e al –infinito è –infinito (questo ci garantisce che la funzione ha almeno uno zero).
Studiamo il segno della sua derivata: $f'(x) = 6x^2 - 6x \geq 0 \quad se \quad x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1$.
La funzione quindi è crescente per $x \leq 0 \ e \ x \geq 1$ e decrescente tra 0 e 1: quindi abbiamo un massimo per x= 0 (di ordinata 2) ed un minimo per x=1 (di ordinata 1).
Dagli elementi trovati si deduce che il grafico della funzione ha **una sola intersezione con l'asse x, di ascissa negativa**.
Il grafico della funzione è il seguente:



QUESITO 6

$$\boldsymbol{f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt}$$

Dobbiamo dimostrare che $\boldsymbol{f'(x) = 2xe^{-x^4}}$.

Posto $u = g(x) = x^2$ si ha: $f(x) = \varphi(u) = \int_0^u e^{-t^2} dt = \int_0^{g(x)} e^{-t^2} dt$

Per il Teorema di Torricelli: $f'(x) = \varphi'(u) \cdot u' = e^{-u^2} \cdot u' = e^{-(x^2)^2} \cdot (2x) = 2xe^{-x^4}$

N.B.

In generale: $\boldsymbol{F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)}$

QUESITO 7

Dobbiamo calcolare la seguente espressione:

$\boldsymbol{S=(1 \cdot 2+1 \cdot 3+\cdots+1 \cdot n)+(2 \cdot 3+2 \cdot 4+\cdots+2 \cdot n)+\cdots+((n-1) \cdot n)}$

Notiamo che:

$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2+2(1 \cdot 2+1 \cdot 3+\cdots+1 \cdot n)+$
$+2(2 \cdot 3+2 \cdot 4+\cdots+2 \cdot n)+\cdots+2(n-1)(n)$; quindi:

$(1+2+3+\cdots+n)^2=1^2+2^2+\cdots+n^2+2 \cdot S$; da cui:

$$S = \frac{1}{2}[(1+2+3+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+\cdots+n^2)]$$

E siccome: $\boldsymbol{1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ $\quad e \quad$ $\boldsymbol{1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}}$
(come si può dimostrare, per esempio per induzione), si ha che:

$$S = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}\right)\right] = \cdots = \frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$$

Pertanto la risposta corretta è la **D**.

QUESITO 8

$\boldsymbol{x-y=2}$, con x ed y numeri naturali dispari; $\boldsymbol{x}$=y+$\boldsymbol{2}$

$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = 2 \cdot ((y+2)^2+y(y+2)+y^2) = 2 \cdot (3y^2+6y+4) =$$

$2 \cdot (3y^2+6y+3+1) = 2 \cdot (3(y^2+2y+1)+1) = 2 \cdot [3k+1]$:

che *è divisibile per 2 ma non per 3.*

Quindi la risposta corretta è la **B**.

QUESITO 9

Togliendo 1 e 90 dai 90 numeri del Lotto ne rimangono 88 da combinare in tutti i modi possibili. Le cinquine che contengono 1 e 90 sono le combinazioni di 88 oggetti a 3 a 3:

$$C_{88,3} = \binom{88}{3} = \frac{88!}{3!\,85!} = 109736$$

QUESITO 10

Dobbiamo dimostrare che: $\boldsymbol{log_2 3 \cdot log_3 2 = 1}$

Per la proprietà dei logaritmi sul cambiamento di base si ha: $\boldsymbol{log_3 2 = \frac{log_2 2}{log_2 3} = \frac{1}{log_2 3}}$
Quindi: $\boldsymbol{log_2 3 \cdot log_3 2 = log_2 3 \cdot \frac{1}{log_2 3} = 1}$