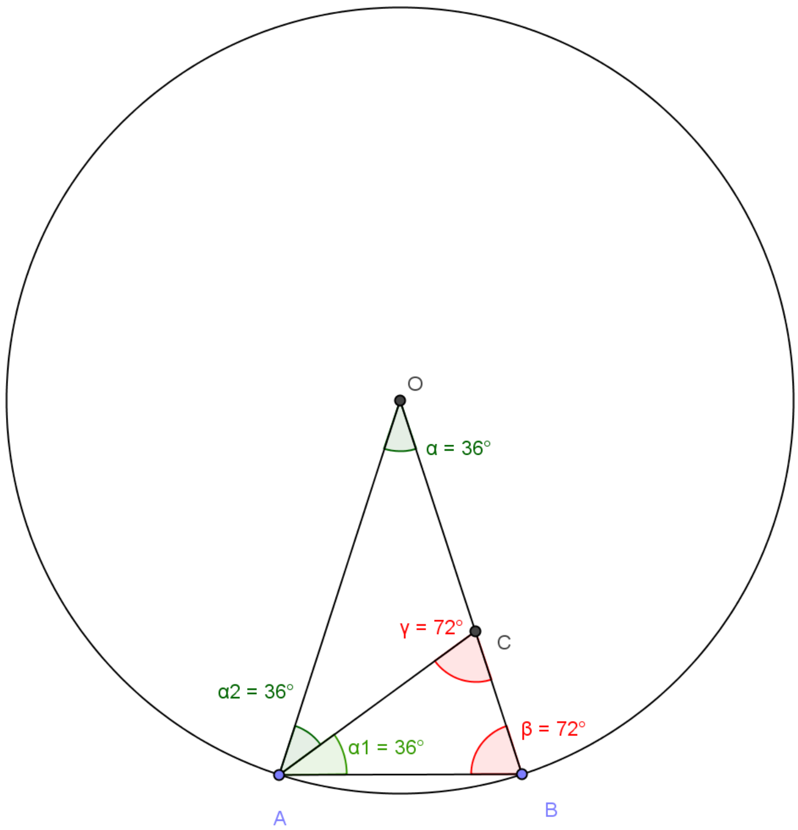
ORDINAMENTO 2005

QUESITO 1

Consideriamo il lato AB del decagono regolare inscritto nella circonferenza e indichiamo con AC la bisettrice dell'angolo alla base A. Essendo l'angolo in O di 36° (360°/10), gli angoli in figura sono facilmente ricavabili.



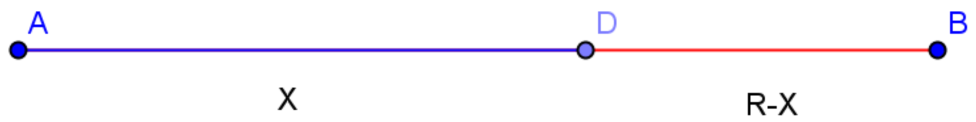
Ricordiamo che la sezione aurea di un segmento e *quella parte del segmento che è media proporzionale tra il segmento stesso e la parte rimanente*.
Dovremo quindi dimostrare che AB è la sezione aurea di OB, ed essendo AB=AC=OC basta dimostrare che OB:OC=OC:BC, cioè che $OC^2=OB*BC$.

Notiamo che i triangoli AOB e ABC sono simili, quindi risulta:

AB:AO=AO:AB, pertanto $AB^2=BC*AO=BC*BO$. Ma AB=AC=OC quindi:
$OC^2=OB*BC$ c.v.d..

Vediamo ora come si può sfruttare il risultato precedente per calcolare sen 18° e sen 36°.

Cerchiamo prima la sezione aurea di un segmento lungo R.



La sezione aurea x si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x^2 = R(R-x)$$

Le soluzioni sono: $x = \frac{-R\pm\sqrt{5R^2}}{2}$, di cui quella accettabile è $\boldsymbol{R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$ che è la sezione aurea del segmento lungo R.

Per il teorema della corda (si veda la prima figura) risulta:

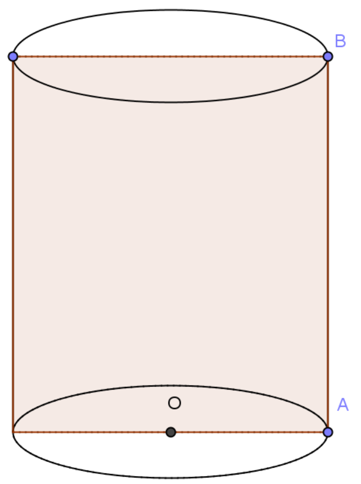
$\overline{AB} = 2R\,sen(18°) = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ da cui: $\boldsymbol{sen(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Calcoliamo ora il seno di 36°.

$sen(36°) = 2\,sen(18°)\cos(18°);$ $\cos(18°) = \sqrt{1-sen^2(18°)} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, quindi:

$$\boldsymbol{sen(36°)} = 2\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

QUESITO 2



Si chiede di trovare la superficie totale minima di un cilindro circolare retto di dato volume.

Capacità lattina = 0,4 litri = 0,4 dm^3 = 400 cm^3.

$V = 400\ cm^3$

Risulta: $V = \pi\cdot\overline{OA}^2\cdot\overline{AB}$
Poniamo $\boldsymbol{\overline{OA} = x}$ **(in cm) con x>0**

$$\overline{AB} = \frac{V}{\pi\cdot\overline{OA}^2} = \frac{400}{\pi\cdot x^2}$$

$S_{TOT} = S_{LAT} + 2S_{BASE}$

$S_{TOT} = 2\pi x \cdot \frac{400}{x^2} + 2\pi x^2 = \frac{800}{x} + 2\pi x^2$

$S'_{TOT} = -\frac{800}{x^2} + 4\pi x = \frac{4\pi x^3 - 800}{x^2}$

S'_{TOT} =0 se $x^3 = \frac{200}{\pi}$ da cui $\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{\pi}}}$

S'_{TOT} >0 se $\boldsymbol{x} > \sqrt[3]{\frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{\pi}}}$

Quindi la funzione S_{TOT} (continua e derivabile per x>0), è crescente per $\boldsymbol{x} > \sqrt[3]{\frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{\pi}}}$

Decrescente per $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \sqrt[3]{\frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{\pi}}}$, perciò ha un minimo assoluto in $\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{\pi}}}$.

Per tale valore di x risulta

$\overline{\boldsymbol{AB}} = \frac{\mathbf{400}}{\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} = \mathbf{2}\sqrt[3]{\frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{\pi}}} = \mathbf{2}\overline{\boldsymbol{OA}}$

Si tratta quindi del cilindro equilatero: *tra tutti i cilindri circolari retti di dato volume quello equilatero ha superficie totale minima.*

Si ha : $\overline{\boldsymbol{OA}} \cong \mathbf{3,99}$ cm e $\overline{\boldsymbol{AB}} \cong \mathbf{7,99}$ cm

Con $x = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ si ha la seguente superficie minima:

$$\boldsymbol{S_{TOT}} = \frac{800}{x} + 2\pi x^2 = \frac{800}{\sqrt[3]{\frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{\pi}}}} + 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{\pi}}}\right)^2 \cong \mathbf{300,53\ cm^2}$$

QUESITO 3

Una retta è tangente ad una curva in un punto P se ha con essa in P almeno due intersezioni coincidenti.

Posto $y = sen\ x$ intersecando con y=x troviamo **sen x =1**

$D(x\ sen\ x) = sen\ x + x\cos x = 1$ quando sen x =1 (dove cos x =0).

Quindi per sen x = 1 le curve di equazione y = x sen x e y = x si incontrano ed hanno tangente con lo stesso coefficiente angolare, quindi sono tangenti.

In modo analogo si procede con y = - x

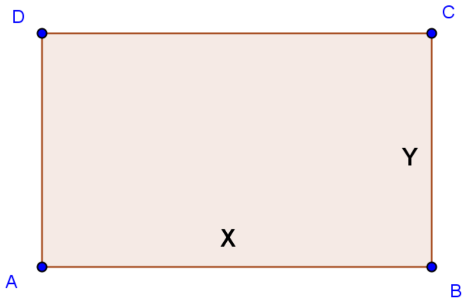
$\begin{cases} y = -x \\ y = x\ sen\ x \end{cases} \Longrightarrow sen\ x = -1$

$D(x\ sen\ x) = sen\ x + x\cos x = -1$ quando sen x = - 1 (dove cos x =0).

Quindi per sen x = - 1 le curve di equazione y = x sen x e y = - x sono tangenti dove sen x = -1

QUESITO 4

Tra tutti i rettangoli isoperimetrici il quadrato è quello di area massima.



Posto AB = x e BC = y

$(x \geq 0, y \geq 0)$

AB+BC =p = costante

Area = S = x y

Per via elementare: sappiamo *che il prodotto di due grandezze a somma costante è massimo quando le due grandezze sono uguali*, quindi S è massima quando x=y, cioè nel caso del quadrato.

Questa proprietà può essere dimostrata a partire dalla seguente identità:

$$(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2 - (\mathrm{x}-\mathrm{y})^2 = 4\mathrm{xy}$$

da cui è facile capire che, se x+y è costante, il massimo di 4xy (quindi di xy), si ha quando $(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2 = 0$, cioè se x=y.

ALTRO MODO

$x + y = p \quad con \quad 0 \leq x \leq p$

$y = p - x \quad con \quad 0 \leq y \leq p$

$S = x \cdot y = x(p-x) = -x^2 + px$

che rappresenta una parabola con la concavità verso il basso, il cui massimo si ha in corrispondenza del vertice:

$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}}$ (che soddisfa le condizioni della x), $\boldsymbol{y} = p - x = p - \frac{p}{2} = \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}}$ da cui x=y , quindi il rettangolo di area massima è il quadrato.

N.B. Il problema potrebbe essere risolto anche mediante le derivate studiando il segno della derivata di S: $S' = -2x + p > 0 \quad se\ x < \frac{p}{2}$, quindi S è crescente se $x < \frac{p}{2}$ e decrescente se $x > \frac{p}{2}$, quindi in $x = \frac{p}{2}$ c'è il massimo assoluto di S.

QUESITO 5

Il numero di Nepero si definisce mediante il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Applicando la definizione di derivata alla funzione $f(x)=e^{x}$ si ottiene:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x}(e^{h}-1)}{h}=e^{x}$$

Si ricordi il limite notevole $\lim_{h\to 0}\frac{(e^{h}-1)}{h}=1$

OSSERVAZIONE

L'importanza principale di **"e"** (un numero trascendente le cui prime cifre decimali sono $\mathbf{2.718281828459}$) risiede nel fatto che è la base dei logaritmi naturali, detti "**neperiani**" dal suo fondatore **Nepero.**

Il valore di **e** a partire dal limite indicato è stato introdotto da **J. Bernoulli.**
La lettera **e** per indicare questa costante è stata introdotta da Eulero (ma non pare che l'abbia fatto perché iniziale del suo nome), inizialmente era indicata con la lettera **b**.

La presenza di **"e"** è molto diffusa in matematica e nelle scienze sperimentali.
Essa compare nella rappresentazione esponenziale dei numeri complessi:

$$a+ib=\rho e^{i\theta}=\rho(\cos\theta+i\,sen\,\vartheta$$

Da questa espressione si ottiene (con $\rho=1\ e\ \theta=\pi$) la celebre relazione di Eulero:

$$e^{i\pi}+1=0$$

che contiene in una stessa formula i cinque simboli più diffusi della matematica:
$\boldsymbol{e, i, \pi, 1, 0}$.

La costante **e** compare per esempio nella distribuzione di Poisson e nella distribuzione di Gauss.

Un'altra importante legge in cui compare la costante **e** è la legge del decadimento radioattivo: $\boldsymbol{N(t)=N_0e^{-\lambda t}}$ (dove $\boldsymbol{N_0}$ è il numero dei nuclei all'istante t=0, $\boldsymbol{N(t)}$ è il numero dei nuclei non ancora decaduti al tempo t, $\lambda=\frac{1}{\tau}$, essendo τ la vita media dei nuclei.

Gli antichi greci sembra che usassero il valore di **e** come rapporto in alcune costruzioni architettoniche.

Per calcolare **"e"** con la precisione voluta si può ricorrere alla successione:

$$\boldsymbol{s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

e trovare n in modo che : $\boldsymbol{s_{n+1} - s_n < E,}$ essendo E l'errore dato. Tale metodo risulta poco efficace, poiché la successione in questione converge molto lentamente.
Per calcolare in modo più rapido un valore approssimato di **e** si può ricorrere allo sviluppo in serie: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, ponendo x=1.

QUESITO 6

La definizione di **n!** (dove n è un numero naturale) è la seguente:
$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$ (per definizione si pone $\boldsymbol{0! = 1}$)**.**
Esso indica le permutazioni senza ripetizioni di n oggetti, che sono le disposizioni senza ripetizioni di n oggetti ad n ad n.

Tra il fattoriale di un numero, il coefficiente binomiale, le disposizioni semplici e le combinazioni semplici ci sono le seguenti relazioni:

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} \quad \Rightarrow \quad k! = \frac{D_{n,k}}{C_{n,k}}}$$

QUESITO 7

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$

Si chiede per quali numeri reali k è f(k) = 2.

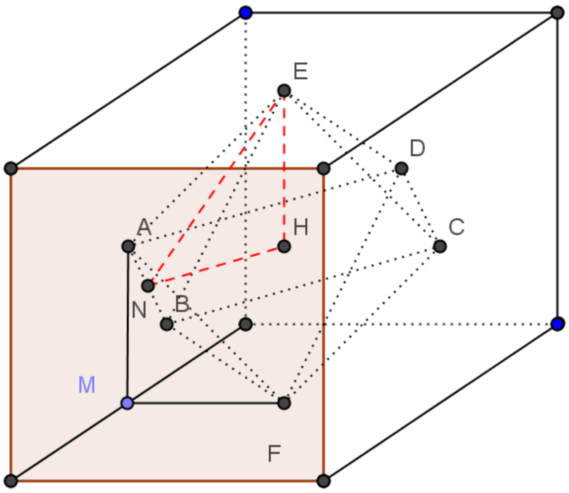
Si chiede cioè di trovare le eventuali soluzioni dell'equazione: $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = 2$
Ma risulta:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2(x^2 - 4x + 4) + 3 = x^2(x - 2)^2 + 3 \geq 3$$

Quindi **non può mai essere f(k) = 2**.

QUESITO 8

Consideriamo l'ottaedro che ha i vertici nei centri delle facce di un cubo. Si chiede di stabilire se l'ottaedro è regolare



Indicando con ℓ lo spigolo del cubo, notiamo che AF, che congiunge i centri di due facce del cubo perpendicolari, è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele AMF (dove M è il punto medio dello spigolo), con AM = MF = $\ell/2$; quindi $AF = \frac{\ell}{2}\sqrt{2}$.
Un ragionamento analogo si può fare per qualsiasi altro spigolo dell'ottaedro. Quindi tutti gli spigoli dell'ottaedro valgono $\frac{\ell}{2}\sqrt{2}$; le facce dell'ottaedro sono quindi triangoli equilateri uguali ed è perciò regolare.

Cerchiamo ora il rapporto tra il volume del cubo e quello dell'ottaedro.

Volume cubo = ℓ^3
Volume ottaedro = $2 \cdot \frac{AB^2 \cdot EH}{3}$
Siccome $AB = AF = \frac{\ell}{2}\sqrt{2}, \quad EH = \frac{EF}{2} = \frac{\ell}{2}$ risulta:

Volume ottaedro = $2 \cdot \frac{AB^2 \cdot EH}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell^2}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell^3}{6}$

Il rapporto richiesto è pertanto:

$\frac{\textit{Volume cubo}}{\textit{Volume ottaedro}}$ **= 6**

QUESITO 9

Siccome $sen\,(55°) = sen\,(90° - 35°) = \cos(35°)$ risulta:

$\boldsymbol{sen^2(35°) + sen^2(55°) = sen^2(35°) + cos^2(35°) = 1}$

ALTRO MODO

$sen^2(30° + 5°) + sen^2(60° - 5°) =$

$= (sen\,30° \cos 5° + \cos 30°\, sen\, 5°)^2 + (sen\,60° \cos 5° - \cos 60°\, sen\,5°)^2 =$

$= \left(\frac{1}{2}\cos 5° + \frac{\sqrt{3}}{2} sen\,5°\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5° - \frac{1}{2}\,sen\,5°\right)^2 = \dots =$

$= \frac{1}{4}(cos^2\,5° + \,sen^2\,5°) + \frac{3}{4}(cos^2\,5° + \,sen^2\,5°) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \mathbf{1}$

QUESITO 10

Si chiede di dimostrare che la funzione $\boldsymbol{f(x) = arctg\,x - arctg\,\frac{x-1}{x+1}}$ è costante.
La funzione è definita per $x \neq -1$. Posto $A =]-\infty; -1[$ e $B =]-1; +\infty[$
Il domino della funzione è quindi: $\mathfrak{D} = A \cup B$.
Calcolando la derivata della funzione si scopre che è uguale a 0 per ogni $x \neq -1$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Quindi per un corollario del Teorema di Lagrange, applicato separatamente ai due intervalli A e B, la funzione risulta costante in A e costante in B (ma non costante in tutto il suo dominio).
Per calcolare le costanti procediamo in questo modo:

Siccome $f(0) = arctg(0) - arctg(-1) = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, risulta $\boldsymbol{f(x) = \frac{\pi}{4}\ in\ B}$
Per calcolare il valore della costante in A calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(arctg\,x - arctg\,\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{\pi}{2} - arctg(1) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi$$

Risulta quindi risulta $\boldsymbol{f(x) = -\frac{3}{4}\pi\ in\ A}$.

Concludendo: $\boldsymbol{f(x) = arctg\, x - arctg\, \frac{x-1}{x+1}} = \begin{cases} -\frac{3}{4}\pi, & \boldsymbol{se\ \ x < -1} \\ \frac{\pi}{4}, & \boldsymbol{se\ \ x > -1} \end{cases}$

Indichiamo di seguito il grafico della funzione:

$$\boldsymbol{f(x) = arctg\, x - arctg\, \frac{x-1}{x+1}} = \begin{cases} -\frac{3}{4}\pi, & \boldsymbol{se\ \ x < -1} \\ \frac{\pi}{4}, & \boldsymbol{se\ \ x > -1} \end{cases}$$