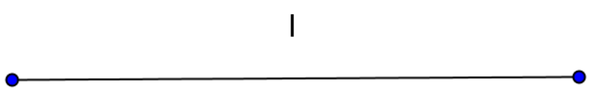
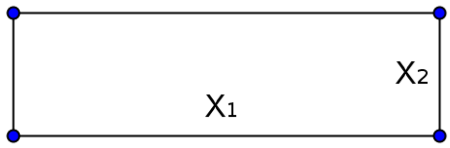
ORDINAMENTO 2006 - PROBLEMA 1

a)





2p(aiuola) = *l* = costante $\quad x_1\,,\ x_2\ > 0 \quad x_1 + x_2 = \frac{l}{2} = costante$

$x_1 \cdot x_2$ massimo quando $x_1 = x_2 = l/4$

L'aiuola di area massima è quadrata, di lato *l*/4.

b) c)

X = lunghezza circonferenza l – X = perimetro quadrato 0< x < l

(escludo x=0, non ci sarebbe la circonferenza e x = l , non ci sarebbe il quadrato)

$x = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{x}{2\pi}$

Area cerchio = $\pi \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$

Lato quadrato = $\frac{l-x}{4}$ Area quadrato = $\frac{(l-x)^2}{16}$

Somma aree = $\frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$

PRIMO METODO

Posto $y = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$, si ha una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, che ha il minimo nel vertice, la cui ascissa è $x_V = \frac{l/8}{1/(2\pi)+1/8} = \frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$ che soddisfa la condizione $0 < x < l$, quindi è accettabile.

Il **massimo** richiesto non esiste.

SECONDO METODO (con le derivate)

La derivata della funzione è: $y' = 2x\left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right) - \frac{l}{8} > 0$ per $x > \frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$ quindi la funzione è decrescente tra 0 e $\frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$, crescente tra $\frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$ $ed\ l$. La somma delle aree è quindi minima per $x = \frac{l}{\frac{4}{\pi}+1}$

N.B. Come già osservato il massimo non esiste nei limiti imposti all'incognita. Ponendo $0 \le x \le l$, cioè accettando la possibilità che l'aiuola possa essere solo quadrata o solo circolare, il massimo richiesto (come si evince dallo studio del segno della derivata prima) può essere in $x = 0$ oppure in $x = l$. Siccome $y(0) = \frac{l^2}{16}$ e $y(l) = \frac{l^2}{4\pi} > y(0)$, la somma delle aree è massima se $x = l$, cioè se c'è solo l'aiuola è circolare.

Consideriamo infine un'aiuola a forma di parallelepipedo rettangolo colma di terreno: si chiede in che percentuale deve aumentare il terreno se ciascuna delle dimensioni dell'aiuola aumenta del 10%.

Dette a, b e c le dimensioni iniziali del parallelepipedo, il suo volume risulta $V = abc$. Aumentando ogni dimensione del 10% si avrà $a' = a + \frac{1}{10}a = \frac{11}{10}a$, analogamente per le altre due dimensioni. Il nuovo volume sarà quindi $V' = \frac{11}{10}a\frac{11}{10}b\frac{11}{10}c = \left(\frac{11}{10}\right)^3 abc = 1{,}331V$
L'incremento del volume è: $\Delta V = V' - V = 0{,}331V$. Avremo quindi un aumento percentuale del volume pari a: $\frac{\Delta V}{V} \cdot 100 = 33{,}1\%$