ORDINAMENTO 2008

QUESITO 1

La proposizione è **falsa**.
Un cono ed un cilindro possono per esempio avere lo stesso volume ma, opportunamente disposti, non è vero che le sezioni intercettate su di essi da un fascio di piani paralleli hanno uguale area.
E' vera invece la proposizione inversa, nota come "**Principio di Cavalieri**".

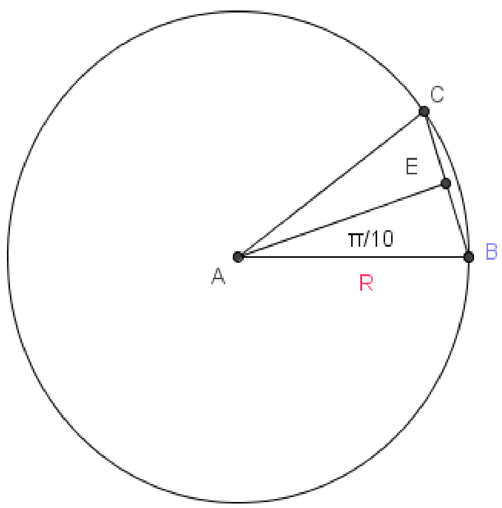
QUESITO 2

Detto R il raggio della circonferenza, il lato del decagono regolare inscritto, sezione aurea di R è dato da:

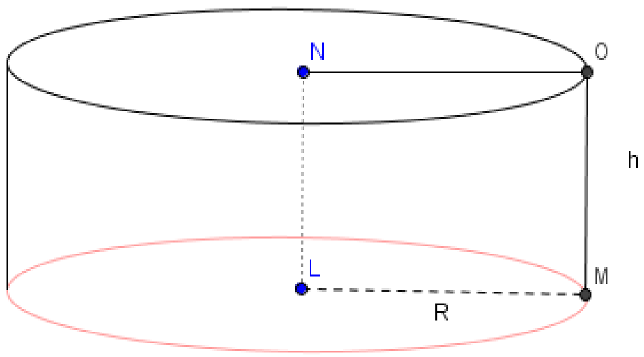
$$\overline{BC} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Poiché l'angolo BAC misura $\frac{2\pi}{10}$, detto AE il segmento perpendicolare a BC, si ha che l'angolo BAE è la metà dell'angolo BAC. Pertanto:

$\overline{BE} = \frac{\overline{BC}}{2} = R\frac{\sqrt{5}-1}{4} = R \cdot sen(\frac{\pi}{10})$, da cui, semplificando per R, si ottiene la relazione richiesta.



QUESITO 3



Sia S la superficie laterale più la superficie di base della casseruola.

Risulta:

$S = \pi R^2 + 2\pi Rh$

con R>0 e h>0

$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \left(\frac{S - \pi R^2}{2\pi R} \right) = \frac{1}{2}(RS - \pi R^3)$$

Applichiamo il metodo delle derivate per trovare il massimo assoluto di V.

$$V' = \frac{1}{2}(S - 3\pi R^2) > 0 \Rightarrow \quad -\sqrt{\frac{S}{3\pi}} < R < \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

Quindi la funzione cresce per R da zero a $\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ e decresce per $R > \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, perciò per $R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ il volume risulta massimo; tale massimo vale $V(\max) = \frac{1}{3} S \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.

QUESITO 4

La regola di de L'Hôpital è esposta in tutti i libri di testo. Applichiamola al caso proposto, che soddisfa le condizioni del teorema.
Il limite richiesto può essere riscritto nella forma seguente:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2^{\frac{x}{2008}}} \right)^{2008}$. Risulta più agevole il calcolo del limite

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2^{\frac{x}{2008}}} \underset{H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2^{\frac{x}{2008}} \cdot \frac{\ln 2}{2008}} = 0^+$. Da cui segue che il limite richiesto è **0**.

QUESITO 5

Il polinomio P(x) è del tipo:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$P(0) = 0 \quad \Rightarrow d = 0$$
$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow P'(0) = 0 \quad \Rightarrow c = 0$$
$$P(1) = 0 \quad \Rightarrow a + b + c + d = 0 \quad \Rightarrow a + b = 0$$

Con queste condizioni il polinomio è del tipo: $P(x) = ax^3 - ax^2$

$$\int_0^1 (ax^3 - ax^2)dx = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{ax^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow a = -1$$

Segue che b = 1, quindi il polinomio richiesto è: $P(x) = -x^3 + x^2$

QUESITO 6

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2}, \quad con > 3$$

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \cdots \Rightarrow n = 7$$

QUESITO 7

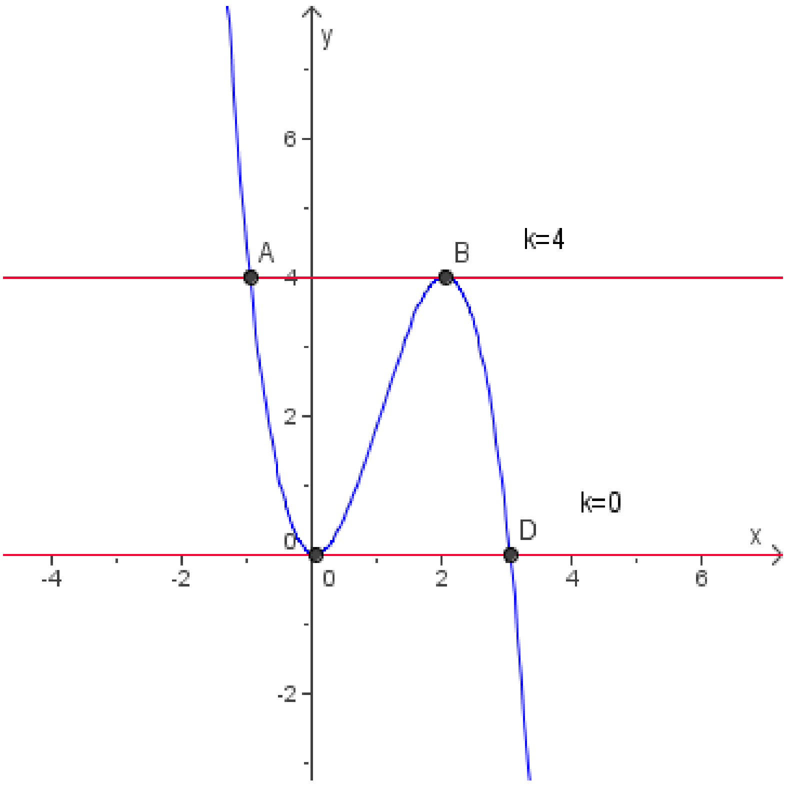
Il numero delle soluzioni dell'equazione data si può determinare graficamente a partire dal sistema:

$$\begin{cases} y = k \\ y = -x^3 + 3x^2 \end{cases}$$

La cubica del sistema ha un massimo relativo per x=2, che vale 4 ed un minimo relativo per x=0, che vale 0.

Dalla rappresentazione sommaria della funzione (vedi pagina seguente), si ottiene che:

- Se k<0: 1 soluzione
- Se k=0: 3 soluzioni, di cui due coincidenti con x=0 ed una positiva
- Se 0<k<4: 3 soluzioni distinte, due positive ed una negativa
- Se k=4: 3 soluzioni, di cui 2 coincidenti con x=2 ed una negativa
- Se k>4: 1 soluzione negativa.



QUESITO 8

Il dominio della funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$ è dato da $x \geq 0$.
Calcoliamo le derivate prima e seconda nel punto richiesto:

$$f'(x) = \pi^x \cdot \ln(\pi) - \pi \cdot x^{\pi-1} \quad \Rightarrow \quad f'(\pi) = \pi^\pi \cdot \ln(\pi) - \pi \cdot \pi^{\pi-1} = \pi^\pi (\ln \pi - 1) > 0$$

$$f''(x) = \pi^x \cdot \ln^2(\pi) - \pi(\pi - 1) \cdot x^{\pi-2} \quad \Rightarrow \quad f''(\pi) = \pi^\pi \cdot \ln^2(\pi) - (\pi - 1) \cdot \pi^{\pi-1} > 0$$

QUESITO 9

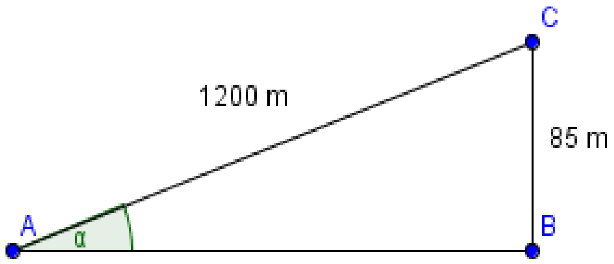
Risulta:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{-x + 1} = \lim_{x \to 1^-} (-x - 1) = -2$$

Quindi il limite per x che tende a 1 **non esiste**.

QUESITO 10



Dai dati forniti si ricava l'inclinazione **alfa** della salita:

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{85}{1200} \cong 0.071 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 4°$$

La "pendenza" di una salita è definita come rapporto tra BC e AB (come dire la **tangente** dell'angolo alfa).

Nel nostro caso $tg(\alpha) \cong 0.071 = 7.1\%$.

La percentuale da riportare sul segnale stradale è quindi 7%.