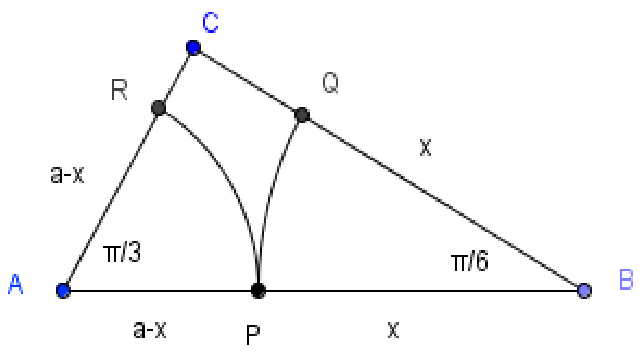
ORDINAMENTO 2008 - PROBLEMA 1

a)



Risulta: $\overline{AC} = \frac{a}{2}$ e $\overline{BC} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Posto $\overline{BQ} = x$ risulta:

$\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}\sqrt{3}$

affinchè R appartenga al lato AC e Q al lato BC.

b)

S = area (PQCR) = area triangolo ABC – area settore circolare APR – area settore circolare BPQ = $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{1}{6}\pi(a-x)^2 - \frac{1}{12}\pi x^2 = S(x) = -\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{3}ax + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{6}a^2$

y = S(x) è l'equazione di una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi il massimo si ha in corrispondenza dell'ascissa del vertice $x = \frac{2}{3}a$.

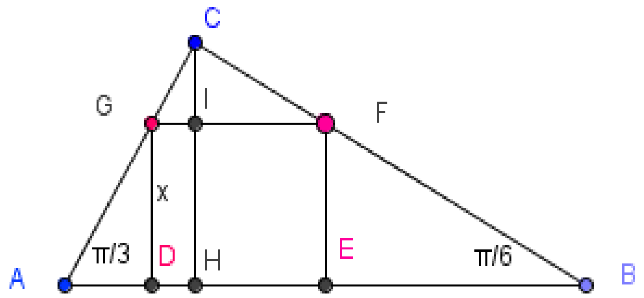
Allo stesso risultato si perviene con il calcolo delle derivate:

$S'(x) = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}a > 0$ se $x < \frac{2}{3}a$, quindi la funzione (nei limiti della x indicati all'inizio) è crescente per $x < \frac{2}{3}a$ e decrescente per per $x > \frac{2}{3}a$, pertanto in $x = \frac{2}{3}a$ si ha il massimo richiesto. Tale massimo vale $S(\frac{2a}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{18})a^2 \cong 0.04a^2$

Essendo $S(\frac{a}{2}) = (\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16})a^2 \cong 0.02a^2$ e $S(\frac{a}{2}\sqrt{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{17\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi)a^2 \cong 0.01a^2$

il minimo si S(x) si ha per $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ e vale $S(\frac{a}{2}\sqrt{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{17\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi)a^2 \cong 0.01a^2$

c)



Risulta $CH = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Posto $\overline{GD} = x$, si hanno le seguenti limitazioni: $0 < x < \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Dalla similitudine fra i triangoli GFC e ABC risulta: $GF : AB = CI : CH$

Si ottiene quindi: $\overline{GF} : a = (\frac{a\sqrt{3}}{4} - x) : \frac{a\sqrt{3}}{4}$

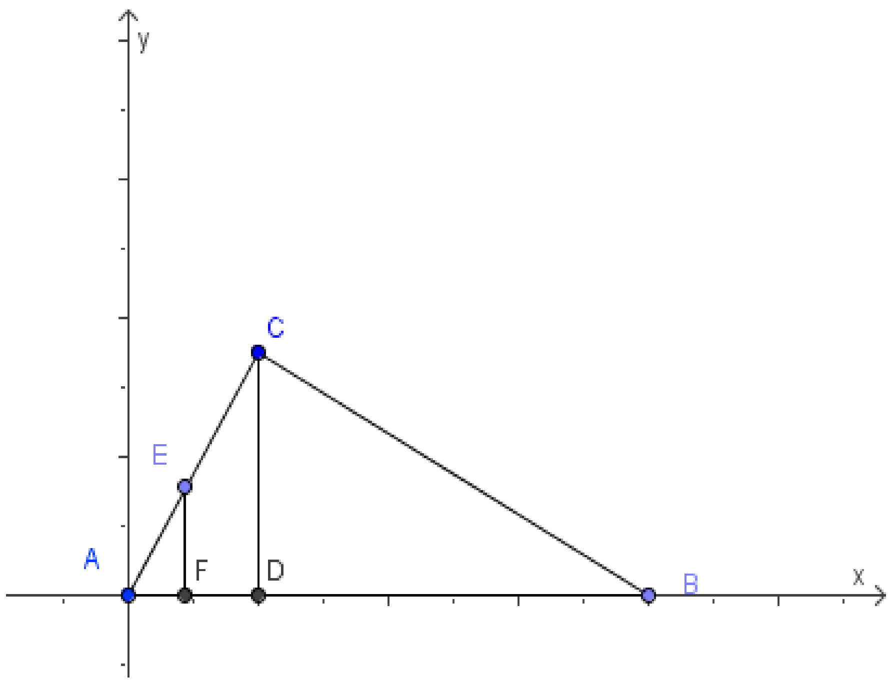
Da cui: $\overline{GF} = (a - \frac{4\sqrt{3}}{3}x)$.

L'area y del rettangolo inscritto è data da:

$y = \overline{DE} \cdot \overline{DG} = x(a - \frac{4\sqrt{3}}{3}x)$ e, con il metodo della parabola o delle derivate, si ottiene facilmente che il massimo richiesto si ha per $x = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

L'area massima vale: $\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$.

d)



Il solido **W** è costituto da due piramidi aventi per base comune il quadrato di lato CD e per altezze rispettivamente AD e BD. Il volume della prima piramide è:

$$V_1 = \frac{1}{3}\overline{CD}^2 \cdot \overline{AD} = \frac{1}{64}a^3$$

$$(\overline{AD} = \frac{a}{4})$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\overline{CD}^2 \cdot \overline{BD} = \frac{3}{64}a^3$$

Il volume richiesto è pertanto:

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{16}a^3$$

Allo stesso risultato si può arrivare utilizzando il calcolo integrale.

$$A = (0;0),\ B = (a;0),\ C = (\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4})$$

Retta AC: $y = \sqrt{3}x = f(x)$

$$V_1 = \int_0^{\frac{a}{4}} [f(x)]^2 dx = \int_0^{\frac{a}{4}} 3x^2 dx = [x^3]_0^{\frac{a}{4}} = \cdots = \frac{1}{64}a^3$$

Retta BC: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-a) = g(x)$

$$V_2 = \int_{\frac{a}{4}}^{a} [g(x)]^2 dx = \int_{\frac{a}{4}}^{a} \frac{1}{3}(x-a)^2 dx = \cdots = \frac{3}{64}a^3$$

E si ottiene il valore già trovato precedentemente.