ORDINAMENTO 2009

QUESITO 1

$f(x)=\int senx dx=-\cos x+k$; imponendo il passaggio per il punto (0;2) si ottiene:
$2=-\cos 0+k \Rightarrow \quad k=3$. La funzione richiesta è quindi: $f(x)=-\cos x+3$.

QUESITO 2

Ci sono applicazioni **suriettive**, ad esempio quella che manda 1 in a, 2 in b, 3 in c, 4 in c.
NON ci sono applicazioni **iniettive**, poiché ad elementi distinti di A devono corrispondere elementi distinti di B e ciò è impossibile perché A possiede 4 elementi e B solo 3.
NON ci sono applicazioni **biiettive** poiché non ce ne sono iniettive.

QUESITO 3

L'equazione y' = 0 deve ammettere una sola soluzione:
$y'=3x^2+2kx+3=0$
$\frac{\Delta}{4}=0 \Rightarrow k^2-9=0 \Rightarrow k=\pm 3$

QUESITO 4

I poliedri regolari (**solidi platonici**) sono **5**, e tra essi **non ce ne sono a facce esagonali**.
Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.
Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).
Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno 120°x3=360°, quindi non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.

QUESITO 5

$\frac{0}{1}=x?$ **Esiste** x, perché $x \cdot 1=0 \quad con \quad x=0$.
$\frac{0}{0}=x?$ **Non** si può attribuire ad x **un** valore numerico, perché $x \cdot 0=0 \quad \forall x$.
$\frac{1}{0}=x?$ **Non** esiste x perché $x \cdot 0=1 \quad MAI$.
$0^0=x?$ **Non** esiste x perché la potenza in R a^x è definita solo con a>0 oppure con a=0 e x>0 (se 0^0 avesse significato, dovendo valere le proprietà delle potenze sarebbe

$0^0 = 0^{1-1} = 0^1 \cdot 0^{-1} = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0}$, quindi avrebbe significato anche $\frac{0}{0}$.

QUESITO 6

Per $x \to -\infty$ $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \sim \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} \to -1$

OPPURE

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \to -1$$

QUESITO 7

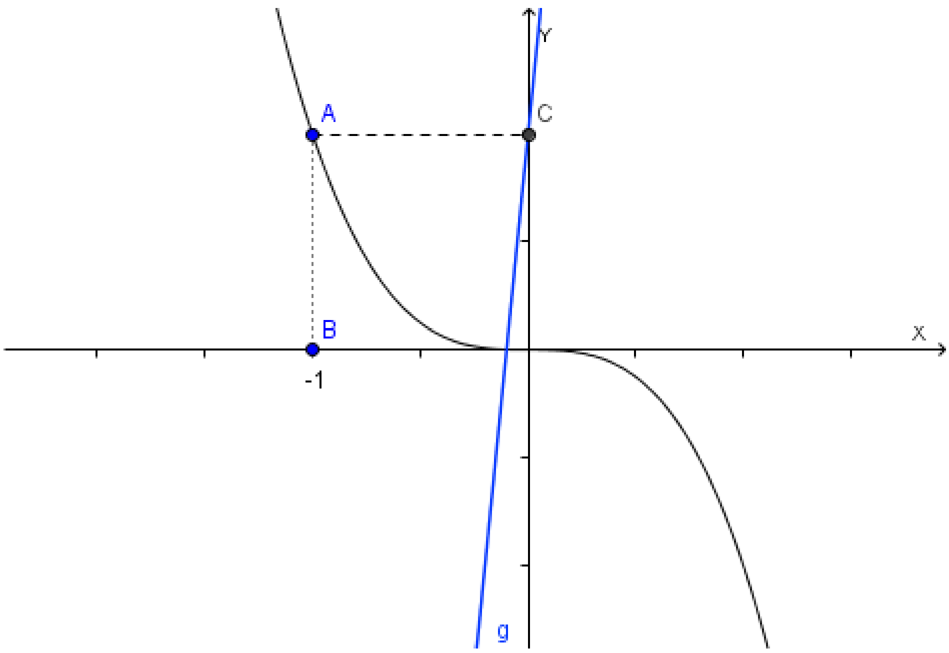
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)}$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

QUESITO 8

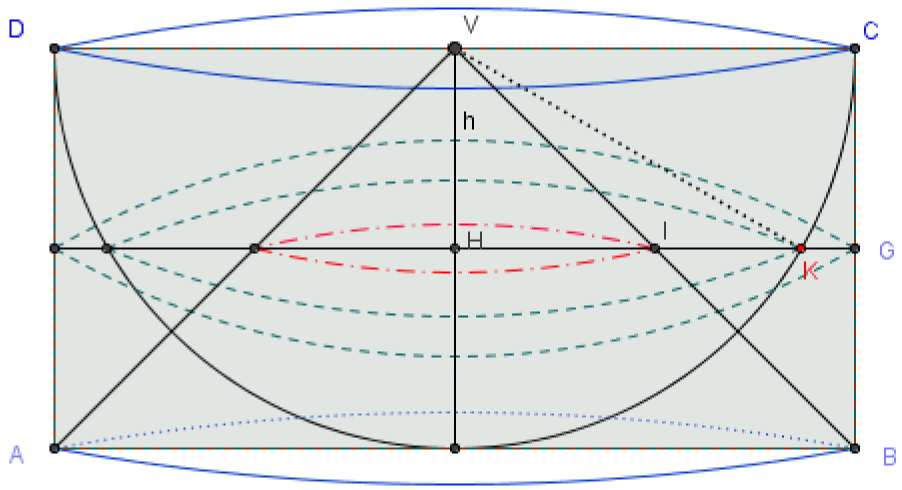
$f(x) = x^{2009} + 2009x + 1$

Rappresentando nello stesso sistema di riferimento le funzioni di equazioni $y = -x^{2009}$ e $y = 2009x + 1$, si scopre facilmente che si intersecano in uno ed un solo punto tra -1 e 0 (in particolare la soluzione è tra -1/2009 e 0).



Il quesito può essere risolto anche applicando il teorema degli zeri all'intervallo [-1;0] e calcolando la derivata della funzione f(x): si scopre che è sempre positiva, quindi la funzione è sempre crescente e perciò la soluzione è unica).

QUESITO 9



Indichiamo con R il raggio della sfera.
Tagliamo la scodella ed il cono con un piano che dista h da V.
La sezione della scodella è una corona circolare che ha raggio esterno uguale a R e raggio interno uguale a $\sqrt{R^2 - h^2}$; la sua area vale quindi:
$\pi(R^2 - (R^2 - h^2)) = \pi h^2$.
La sezione del cono è un cerchio di raggio h (il raggio della sezione con il cono è sempre uguale alla distanza h da V: detto infatti O il centro della base del cono, il triangolo AOB è rettangolo isoscele): l'area di tale cerchio è πh^2, come l'area della corono circolare.
Per il *Principio di Cavalieri* la scodella ha quindi volume pari a quello del cono

QUESITO 10

Se la funzione f(x) ha periodo T, la funzione f(nx) ha periodo T/n.
Siccome cos(x) ha periodo 2π , cos(5x) avrà periodo $2\pi / 5$.
Determinazione diretta del periodo.
Dobbiamo trovare il più piccolo numero reale positivo T per il quale:
$\cos 5(x+T) = \cos 5x$. Risulta: $\cos 5(x+T) = \cos(5x+5T) = \cos(5x)$ se $5T = 2\pi$ da cui
$T = \frac{2\pi}{5}$

Con la collaborazione di Simona Scoleri e Angela Santamaria