ORDINAMENTO 2011 - PROBLEMA 2

1)

$$f(x) = (ax+b)\, e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

Calcolo la derivata prima e la pongo uguale a zero quando x=4: $f'(x) = a\, e^{-\frac{x}{3}} + (ax+b)\left(-\frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}\right)$

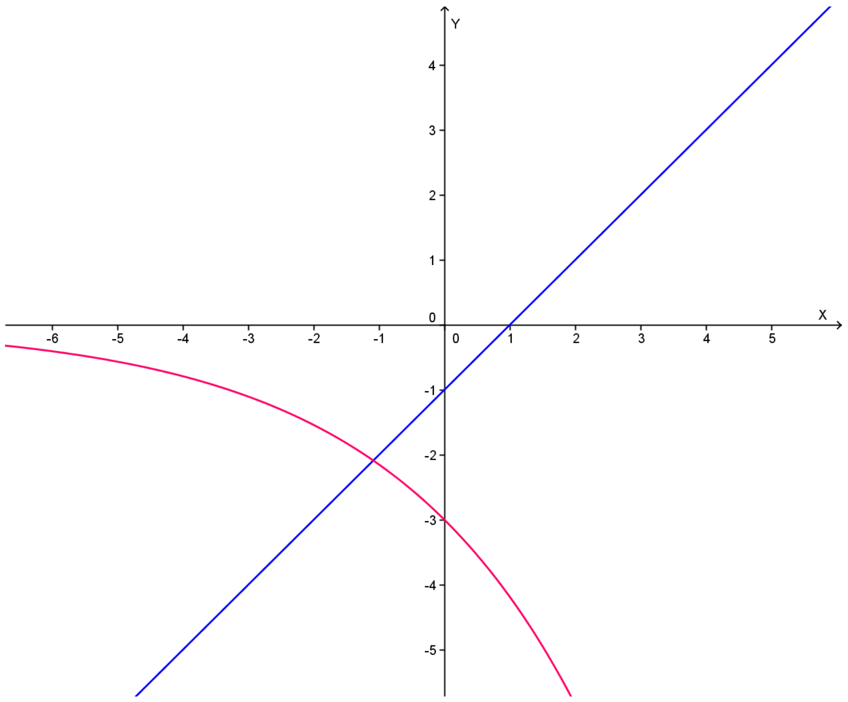
f '(4)=0 se …. **a+b=0**; poi impongo il passaggio per il punto (0;2) e trovo **b+3=2**, da cui **b = -1 e a = 1.**

2)

$$f(x) = (x-1)\, e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

Questa funzione è continua su tutto R, taglia l'asse delle ordinate in (0;2) e l'asse delle ascisse in un punto ad ascissa negativa **a**, come si deduce dalla risoluzione grafica dell'equazione:

$(x-1)\, e^{-\frac{x}{3}} + 3 = 0$, equivalente a $x - 1 = \dfrac{-3}{e^{-\frac{x}{3}}}$, come dire: $x - 1 = -3 e^{\frac{x}{3}}$



Sempre dal grafico deduciamo che la funzione è positiva per x>a, essendo $x - 1 > -3 e^{\frac{x}{3}}$

Calcolo dei limiti:

il limite al – infinito è – infinito (non c'è forma d'indecisione), quello al + infinito è 3, poiché $(x-1)\,e^{-\frac{x}{3}}$ tende a zero (zero +), vedendolo nella forma $\dfrac{(x-1)}{e^{\frac{x}{3}}}$ ed osservando che il denominatore è un infinito di ordine superiore rispetto al numeratore.
C'è l'asintoto orizzontale y=3, non c'è asintoto obliquo al – infinito perché f(x)/x tende ancora a + infinto.

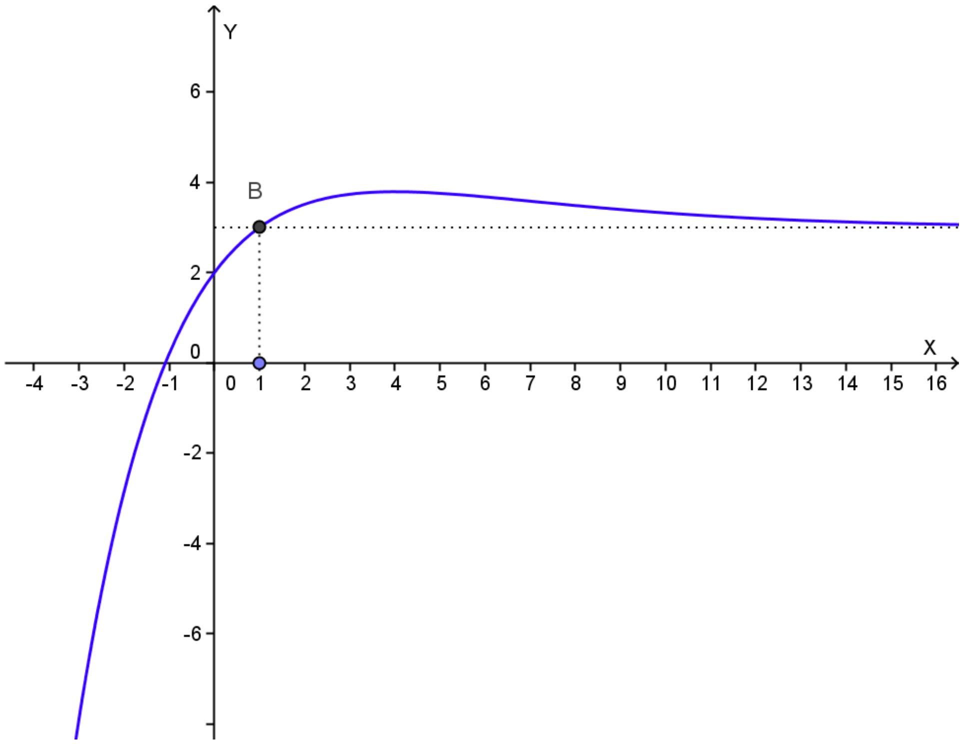
Studio della derivata prima:

$f'(x)=\dfrac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}(4-x)\geq 0$ per $x\leq 4$ (in cui la funzione è crescente); abbiamo un massimo (assoluto) in x=4, che vale $3\,e^{-\frac{4}{3}}+3$.

Studio della derivata seconda:

$f''(x)=\dfrac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{3})\geq 0$ per $x\geq 7$ (concavità verso l'alto); flesso in x=7, con ordinata $6e^{-\frac{7}{3}}+3$.

Il grafico è il seguente:



3)

L'area richiesta (considerando anche la regione per x>1) è data da:

$$\int_0^1 (3-f(x))dx+\int_1^{+\infty}(f(x)-3)dx=\int_0^1\left((1-x)\,e^{-\frac{x}{3}}\right)dx+\int_1^{+\infty}\left((x-1)\,e^{-\frac{x}{3}}\right)dx$$

Integrando per parti e tenendo presente che per l'integrale improprio occorre calcolare il limite per k che tende a + infinito dell'integrale fra 1 e k) si ottiene per l'area il valore: $\left(9e^{-\frac{1}{3}}-6\right)+9e^{-\frac{1}{3}}=18e^{-\frac{1}{3}}-6$ $\cong 6.90$

N.B. Interpretando la regione come "finita" (abbiamo solo la zona con x<1) il valore dell'area è dato dal primo integrale, quindi $\left(9e^{-\frac{1}{3}}-6\right)=9e^{-\frac{1}{3}}-6\cong 0.45$

4)

La funzione f(x), come si evince dalla tabella seguente, è accettabile:

x	f(x)	y	|f(x)-y|
0	2,000	1,97	0,030
1	3,000	3,02	0,020
2	3,513	3,49	0,023
3	3,736	3,71	0,026
4	3,791	3,80	0,009
5	3,756	3,76	0,004
6	3,677	3,65	0,027

L'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori a 3 milioni di euro, poiché la funzione f(x), per x che tende a + infinito tende a 3 (precisamente 3 +).

Di seguito indichiamo il grafico della funzione f(x) insieme ai punti $(x_i; y_i)$: come si può notare, nei limiti della scala utilizzata, i punti sono "praticamente" sul grafico della f(x).