LICEO SCIENTIFICO 2026 – PROBLEMA 1

In tabella sono indicati i rilevamenti, fatti a inizio anno a partire dal 2016, del livello dell'acqua del lago di Bracciano. Nel 2016 e nel 2017 il lago, oggetto di prelievi, era utilizzato come riserva idrica di emergenza per i comuni limitrofi e per l'approvvigionamento di Roma. Nel 2017, in considerazione dell'impatto ambientale e del notevole abbassamento del livello idrometrico rispetto a quello considerato ottimale, si è deciso di interrompere i prelievi, sospensione tuttora in atto.

Anno (1° genn.)	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Livello (dm)	-6	-16	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-10	-10	-10

Legenda: valori in decimetri rispetto allo zero idrometrico, rilevati al 1° gennaio di ogni anno.

Si scelga un sistema di riferimento in cui l'unità sull'asse delle ascisse corrisponda a un anno e il 1° gennaio 2016 corrisponda allo zero, mentre sull'asse delle ordinate l'unità corrisponda a 1 dm rispetto allo zero idrometrico (livello ottimale).

Con buona approssimazione, dall'inizio del 2016 fino all'inizio del 2019, si può descrivere l'andamento del livello delle acque con il modello polinomiale

$$y = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 - 20, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Nel periodo tra l'inizio del 2019 e l'inizio del 2023 si assume una crescita oscillante, approssimata con un modello del tipo $y = mx - 24 + \text{sen}^2(\pi x)$, con $m \in \mathbb{R}$. Poi, fino all'inizio del 2026, l'andamento può essere approssimato con un modello del tipo $y = 2\cos(2\pi x) + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) *Utilizzando i dati riportati in tabella e le informazioni fornite, definire il modello matematico $f(x)$ che esprime l'andamento del livello delle acque del lago in funzione del tempo, dopo aver determinato i valori dei parametri.*

a)

Determinazione di a, b, c (tratto 2016–2019, $0 \le x < 3$)

Nel sistema di riferimento scelto: 2016 corrisponde a $x = 0$, 2017 a $x = 1$, 2018 a $x = 2$, 2019 a $x = 3$. Il modello ha tre parametri incogniti, quindi servono tre equazioni indipendenti, ottenute imponendo il passaggio per tre punti noti della tabella ($x = 0, 1, 3$).

Per $x = 0$, $y = -6$:

$$-6 = 16a - 8b + 4c - 20 \;\Rightarrow\; 16a - 8b + 4c = 14 \qquad (1)$$

Per $x = 1$, $y = -16$:

$$-16 = a - b + c - 20 \;\Rightarrow\; a - b + c = 4 \qquad (2)$$

Nota: per $x = 2$ si ha $(x-2) = 0$, quindi il modello dà sempre $y = -20$ qualunque siano a, b, c – il dato 2018 è automaticamente soddisfatto ma non utile a determinare i parametri. Serve quindi un terzo punto diverso, cioè $x = 3$.

Il valore $y = -18$ è il dato misurato a inizio 2019 ($x = 3$). Poiché il primo tratto è definito su $[0, 3)$, il valore corretto si ottiene come limite sinistro; essendo una funzione polinomiale, continua su $\mathbb{R}$, tale limite coincide con la sostituzione diretta di $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} [a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 - 20] = -18 \implies a+b+c = 2 \qquad (3)$$

Risolvendo il sistema. Sottraendo la (2) dalla (3):

$$(a+b+c) - (a-b+c) = 2-4 \ \Rightarrow\ 2b = -2 \ \Rightarrow\ b = -1$$

Dalla (3): $a + c = 3$, cioè $c = 3 - a$. Sostituendo nella (1):

$$16a + 8 + 12 - 4a = 14 \ \Rightarrow\ 12a = -6 \ \Rightarrow\ a = -\tfrac{1}{2}$$

Ricaviamo infine $c = 3 - a = 3 - (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$.

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -1, \qquad c = \frac{7}{2}$$

Determinazione di m (tratto 2019–2023, $3 \le x \le 7$)

Imponendo la continuità in $x = 3$ con il valore $y = -18$ già trovato:

$$-18 = 3m - 24 + \operatorname{sen}^2(3\pi) = 3m - 24 \ \Rightarrow\ m = 2$$

$$\text{Per } 3 < x \le 7: \quad y = 2x - 24 + \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

Determinazione di k (tratto 2023–2026, $7 < x \le 10$)

Usiamo il dato del 2024, cioè $x = 8$, $y = -10$:

$$-10 = 2\cos(16\pi) + k = 2 + k \ \Rightarrow\ k = -12$$

Modello completo

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \dfrac{7}{2}(x-2)^2 - 20, & 0 \le x < 3 \\ 2x - 24 + \operatorname{sen}^2(\pi x), & 3 \le x \le 7 \\ 2\cos(2\pi x) - 12, & 7 < x \le 10 \end{cases}$$

b) *Si assuma come modello descrittivo dell'andamento idrometrico del lago la funzione $f(x)$ definita a tratti al punto precedente. Studiare f e tracciare un suo grafico, dopo aver verificato la continuità, studiato la derivabilità e determinato i punti di estremo relativo.*

b)

Continuità

La funzione è costituita da tratti di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$ (una polinomiale, una funzione goniometrica, un coseno), quindi basta verificare la continuità nei punti di raccordo $x = 3$ e $x = 7$.

In $x = 3$: dal primo tratto $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{7}{2} - 20 = -18$; dal secondo tratto $f(3) = 6 - 24 + \text{sen}^2(3\pi) = -18$. Coincidono: **f è continua in** $x = 3$.

In $x = 7$: dal secondo tratto $f(7) = 14 - 24 + \text{sen}^2(7\pi) = -10$; dal terzo tratto $\lim_{x\to 7^+} f(x) = 2\cos(14\pi) - 12 = -10$. Coincidono: **f è continua in** $x = 7$. Quindi f è continua su tutto $[0; 10]$.

Derivabilità

Ogni tratto è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, quindi resta da controllare solo i punti di raccordo. Oltre alla continuità, serve che le derivate sinistra e destra coincidano: criterio sufficiente ma non necessario per la derivabilità.

In $x = 3$: $f'(x) = -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2)$ dà $f'_-(3) = -2 - 3 + 7 = 2$; dal secondo tratto $f'(x) = 2 + \pi\,\text{sen}(2\pi x)$ dà $f'_+(3) = 2 + \pi\,\text{sen}(6\pi) = 2$. Coincidono: **f è derivabile in** $x = 3$.

In $x = 7$: $f'_-(7) = 2 + \pi\,\text{sen}(14\pi) = 2$; dal terzo tratto $f'(x) = -4\pi\,\text{sen}(2\pi x)$ dà $f'_+(7) = -4\pi\,\text{sen}(14\pi) = 0$. Sono diverse: **f NON è derivabile in** $x = 7$ (punto angoloso).

Primo tratto: $0 \le x < 3$

$$f'(x) = -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) = (x-2)\left[-2(x-2)^2 - 3(x-2) + 7\right]$$

Sviluppando il trinomio $g(x) = -2(x-2)^2 - 3(x-2) + 7$:

$$g(x) = -2x^2 + 5x + 5$$

$\Delta = 25 + 40 = 65$, radici $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{65}}{-4} \approx -0{,}77$ e $\approx 3{,}27$, entrambe fuori dal dominio $[0, 3)$. Essendo g una parabola con concavità verso il basso, $g > 0$ su tutto $[0, 3)$. Quindi il segno di f' coincide con quello di $(x-2)$: f è decrescente per $0 \le x < 2$ e crescente per $2 < x < 3$.

$x \;=\; 2$ è punto di **minimo relativo**, con $f(2) \;=\; -20$.
$x \;=\; 0$ è un **massimo di frontiera**, con $f(0) \;=\; -6$.

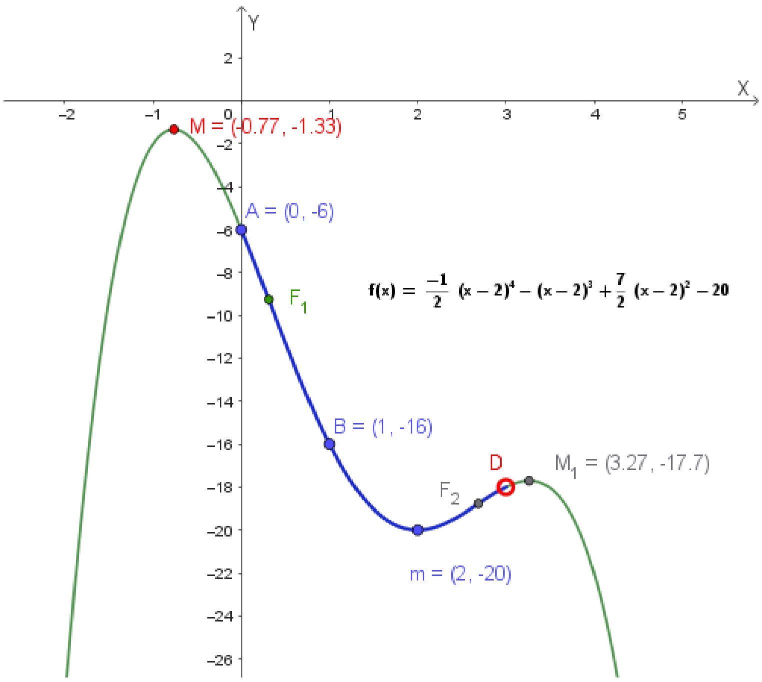
Derivando ancora ed esplicitando in x:

$$f''(x) = -6(x-2)^2 - 6(x-2) + 7 = -6x^2 + 18x - 5$$

Poniamo $f''(x) = 0$, cioè $6x^2 - 18x + 5 = 0$:

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 120}}{12} = \frac{9 \pm \sqrt{51}}{6} \;\Rightarrow\; x_1 \approx 0{,}31, \quad x_2 \approx 2{,}69$$

La disequazione $f''(x) > 0$, scritta con il primo coefficiente positivo, diventa $6x^2 - 18x + 5 < 0$, soddisfatta tra le radici: f è concava verso l'alto per $x_1 < x < x_2$ e verso il basso altrove. Punti di flesso in $x_1 \approx 0{,}31$ ($f \approx -9{,}25$) e $x_2 \approx 2{,}69$ ($f \approx -18{,}77$).



Legenda: A=(0, -6) massimo di frontiera, $F_1 \approx (0{,}31; -9{,}25)$ *e* $F_2 \approx (2{,}69; -18{,}77)$ *flessi, m=(2, -20) minimo, D=(3, -18) estremo del tratto.*

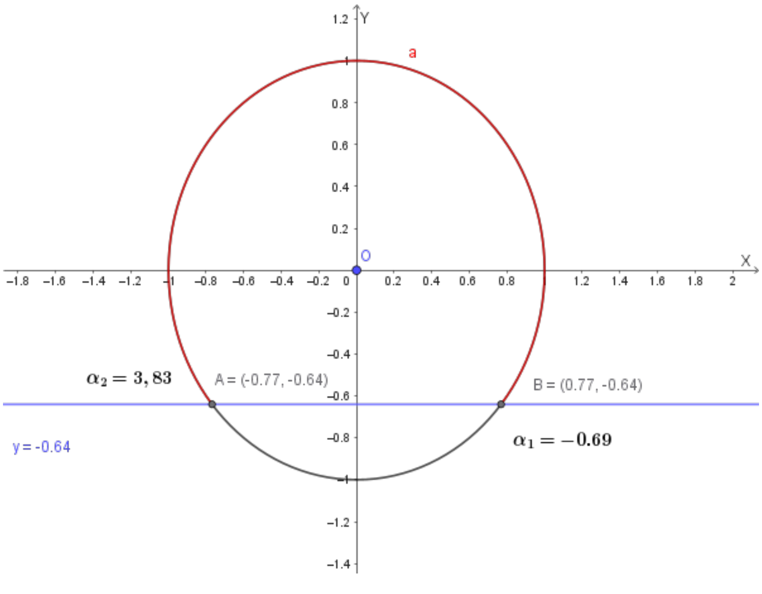
Secondo tratto: $3 \leq x \leq 7$

$$f'(x) = 2 + \pi \operatorname{sen}(2\pi x)$$

Poiché $\pi \operatorname{sen}(2\pi x)$ oscilla tra $-\pi$ e π (con $\pi \approx 3{,}14$), f' non ha segno costante: piccole oscillazioni periodiche di periodo 1. Cerchiamo i punti critici risolvendo $f'(x) = 0$:

$$2 + \pi \operatorname{sen}(2\pi x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(2\pi x) = -\frac{2}{\pi} \approx -0{,}64$$

Poniamo $\alpha = 2\pi x$ e studiamo il segno di $f'(x) > 0$, cioè $\operatorname{sen}(\alpha) > -\frac{2}{\pi}$. Con la calcolatrice: $\arcsin(0{,}64) \approx 0{,}69$ rad. Le soluzioni sono $\alpha_1 \approx -0{,}69$ (IV quadrante) e $\alpha_2 \approx \pi + 0{,}69 \approx 3{,}83$ (III quadrante); l'arco in cui $\operatorname{sen}(\alpha) > -0{,}64$ va da α_1 ad α_2.



Legenda: arco rosso = sen(α) $> -0{,}64$, da $\alpha_1 \approx -0{,}69$ (IV quadrante) a $\alpha_2 \approx 3{,}83$ (III quadrante).

Quindi $f'(x) > 0$ per $\alpha_1 + 2k\pi < \alpha < \alpha_2 + 2k\pi$, cioè, tornando a $x = \dfrac{\alpha}{2\pi}$:

$$\frac{-0{,}69}{2\pi} + k < x < \frac{3{,}83}{2\pi} + k \;\Rightarrow\; -0{,}11 + k < x < 0{,}61 + k$$

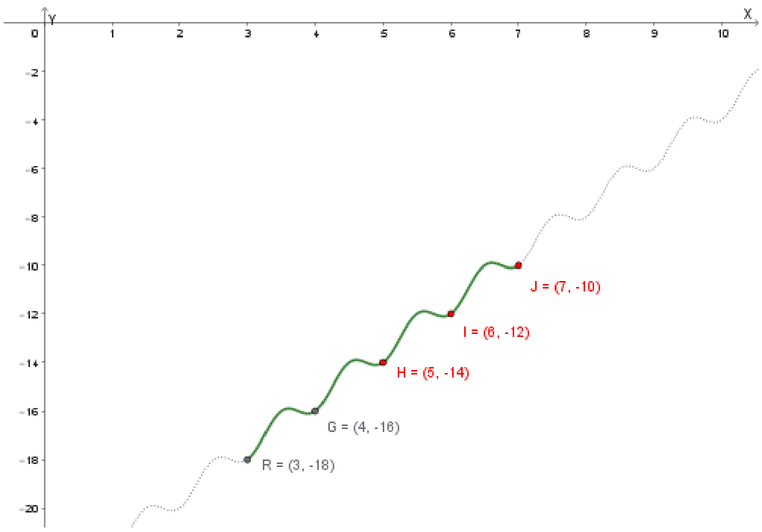
Restringendo al dominio $[3; 7]$:

- $k = 3$: $3 \leq x < 3{,}61 \quad (f' > 0)$
- $k = 4$: $3{,}89 < x < 4{,}61 \quad (f' > 0)$
- $k = 5$: $4{,}89 < x < 5{,}61 \quad (f' > 0)$
- $k = 6$: $5{,}89 < x < 6{,}61 \quad (f' > 0)$
- $k = 7$: $6{,}89 < x \leq 7 \quad (f' > 0)$

Negli intervalli complementari $f' < 0$. Schema dei segni per un periodo campione ($3 \leq x \leq 4$):

x	3		3,61		3,89		4
$f'(x)$	2	+	0	−	0	+	2
$f(x)$		$\nearrow$	**max**	$\searrow$	**min**	$\nearrow$	

4 massimi relativi in $x \approx 3{,}61$; $4{,}61$; $5{,}61$; $6{,}61$ e 4 minimi relativi in $x \approx 3{,}89$; $4{,}89$; $5{,}89$; $6{,}89$, con oscillazioni di soli 0,2 dm: ad esempio $f(3{,}61) \approx -15{,}89$ e $f(3{,}89) \approx -16{,}11$.



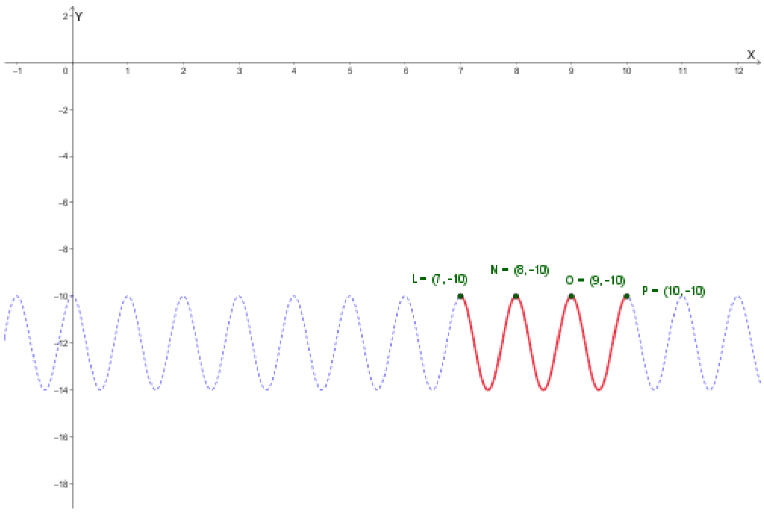
Legenda: crescita con piccole oscillazioni; punti interi R=(3,-18), G=(4,-16), H=(5,-14), I=(6,-12), J=(7,-10).

Terzo tratto: $7 < x \leq 10$

Coseno di periodo 1, dilatato verticalmente di un fattore 2 e traslato in basso di 12: oscilla tra -10 (max) e -14 (min).

$$f'(x) = -4\pi\,\text{sen}(2\pi x)$$

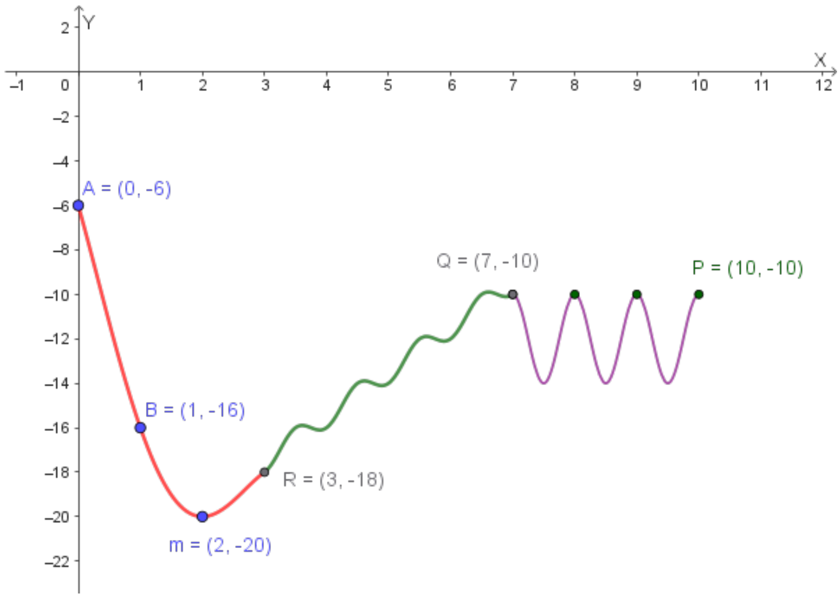
Massimi relativi in $x = 8, 9$ (e di frontiera in $x = 10$), con $f = -10$. Minimi relativi in $x = 7{,}5$; $8{,}5$; $9{,}5$, con $f = -14$.



Legenda: L=(7,-10), N=(8,-10), O=(9,-10), P=(10,-10) massimi relativi; minimi in $x = 7{,}5;\ 8{,}5;\ 9{,}5$.

Grafico complessivo

Unendo i tre tratti — continui ovunque, con un punto angoloso in $x = 7$ — si ottiene il grafico complessivo di f su $[0; 10]$:



Legenda: in rosso il 1° tratto (A=(0,-6), m=(2,-20)), in verde il 2°, in viola il 3°, punto angoloso in Q=(7,-10).

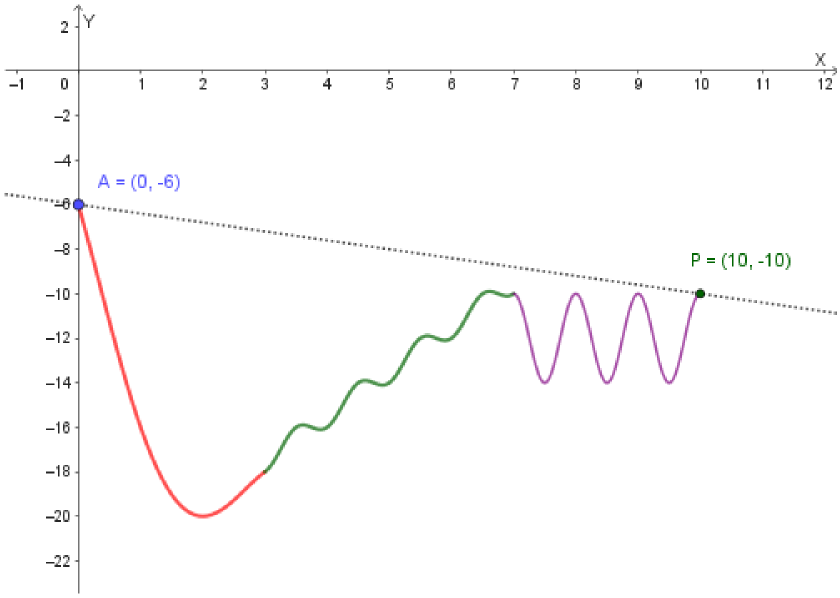
> **c)** *Giustificare la non applicabilità del teorema di Lagrange alla funzione f in $[0; 10]$. Esistono, tuttavia, punti di ascissa $s \in]0; 10[$ tali che $f'(s) = \dfrac{f(10) - f(0)}{10}$? Motivare la risposta.*

c)

Non applicabilità del teorema di Lagrange

Il teorema di Lagrange richiede che f sia continua su $[0;10]$ e **derivabile su tutto l'intervallo aperto** $]0;10[$. La prima condizione è verificata (punto b). La seconda no: f non è derivabile in $x=7$ (punto angoloso), e $7 \in]0;10[$. Mancando un'ipotesi del teorema, **il teorema di Lagrange non è applicabile su** $[0;10]$.

Significato geometrico della domanda



Legenda: A=(0,-6) e P=(10,-10), estremi della funzione; la retta tratteggiata è la secante AP, di coefficiente angolare $-0{,}4$.

Il rapporto richiesto vale:

$$\frac{f(10)-f(0)}{10} = \frac{-10-(-6)}{10} = -0{,}4$$

È il coefficiente angolare della secante AP tra $A=(0;-6)$ e $P=(10;-10)$. Chiedersi se esiste s con $f'(s)=-0{,}4$ equivale a chiedersi se in qualche punto la tangente è **parallela** alla secante AP.

Non potendo usare Lagrange sull'intero intervallo, f è comunque continua e derivabile separatamente sui tre tratti $[0;3]$, $[3;7]$, $[7;10]$: il teorema vale quindi su ciascuno di essi.

Conclusione tramite il teorema dei valori intermedi

Primo tratto: f' è continua su $]0;3[$ e assume sia valori minori di $-0{,}4$ (es. $f'(0)=-10$) sia maggiori (es. $f'(3)=2$): esiste almeno un punto con $f'(s)=-0{,}4$.

Secondo e terzo tratto: f' oscilla periodicamente, rispettivamente tra circa $-1{,}14$ e $5{,}14$, e tra circa $-12{,}57$ e $12{,}57$: intervalli che contengono ampiamente $-0{,}4$, quindi la pendenza viene assunta più volte.

Sì: esistono punti $s \in]0;10[$ con $f'(s) = -0{,}4$ — in totale **15 valori**, a causa delle oscillazioni periodiche del modello.

Calcolo dei valori di s

Primo tratto: $s \approx 1{,}94$.

Secondo tratto: da $\operatorname{sen}(2\pi x) \approx -0{,}764$, in $]3;7[$: $s \approx 3{,}64;\ 3{,}86;\ 4{,}64;\ 4{,}86;\ 5{,}64;\ 5{,}86;\ 6{,}64;\ 6{,}86$.

Terzo tratto: da $\operatorname{sen}(2\pi x) \approx 0{,}032$, in $]7;10[$: $s \approx 7{,}01;\ 7{,}49;\ 8{,}01;\ 8{,}49;\ 9{,}01;\ 9{,}49$.

In totale **15 valori** di s soddisfano la condizione richiesta.

---

d) *Spiegare perché il teorema della Media Integrale è applicabile alla funzione f in $[0;10]$. Calcolare, quindi, la variazione media Δh del livello delle acque del lago negli anni presi in esame. Infine, considerando che la superficie del lago è di circa $57\,km^2$, utilizzare Δh per stimare, in litri, la differenza del volume di acqua tra l'inizio del 2016 e l'inizio del 2026.*

d)

f è continua in $[0;10]$ (punto b), quindi è applicabile il teorema della media integrale: il valor medio Δh è dato da

$$\Delta h = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(x)\,dx$$

Calcolo dell'integrale, tratto per tratto

Primo tratto:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{10}(x-2)^5 - \frac{1}{4}(x-2)^4 + \frac{7}{6}(x-2)^3 - 20x\right]_0^3 = -49{,}05$$

Secondo tratto:

$$\int_3^7 f(x)\,dx = \left[x^2 - \frac{47}{2}x - \frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{4\pi}\right]_3^7 = -54$$

Terzo tratto:

$$\int_7^{10} f(x)\,dx = \left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{\pi} - 12x\right]_7^{10} = -36$$

Sommando i tre contributi:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = -49{,}05 - 54 - 36 = -139{,}05$$

$$\Delta h = \frac{-139{,}05}{10} = -13{,}905\,\mathrm{dm} = -1{,}3905\,\mathrm{m}$$

Nel decennio 2016–2026 il livello del lago si è attestato in media a circa $1{,}39\,\mathrm{m}$ al di sotto dello zero idrometrico ottimale.

Stima della differenza di volume d'acqua

Superficie del lago: $S = 57\,\mathrm{km}^2 = 57\cdot 10^6\,\mathrm{m}^2$. Il volume medio mancante rispetto alla condizione ottimale è:

$$V = S\cdot|\Delta h| = 57\cdot 10^6 \cdot 1{,}3905 \approx 7{,}93\cdot 10^7\,\mathrm{m}^3$$

Convertendo in litri ($1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\text{litri}$):

$$V \approx 7{,}93 \cdot 10^{10} \text{ litri}$$

In base al modello della media integrale, nel periodo considerato è mancato un volume medio complessivo di circa **79,3 miliardi di litri** rispetto allo zero idrometrico ottimale.

Nota di commento geometrico. $\Delta h = -13{,}905\,\text{dm}$ è il **valore medio** del livello nel decennio (non la variazione tra il 2016 e il 2026): da qui la stima $V \approx 7{,}93 \cdot 10^{10}$ litri, come richiesto dal testo.

Se invece si considerasse la variazione puntuale $f(10) - f(0) = -4\,\text{dm}$, si otterrebbe $V \approx 2{,}28 \cdot 10^{10}$ litri. Questa interpretazione, secondo noi, non è quella intesa dal testo. Spieghiamo di seguito la nostra scelta, cioè quella di calcolare il volume medio complessivo mancato rispetto allo zero idrometrico nel decennio che va dal 2016 al 2026.

Approfondimento interpretativo. L'interpretazione adottata si rafforza considerando tre elementi convergenti del testo ministeriale:

1. **«Utilizzare Δh»**: se il testo avesse voluto la differenza puntuale $f(10) - f(0)$, non avrebbe avuto bisogno di richiedere esplicitamente l'uso del valor medio integrale — quel valore si legge direttamente dalla tabella senza alcun integrale.

2. **«Stimare»**: la differenza $f(10) - f(0) = -4\,\text{dm}$ è un dato esatto ricavabile dalla tabella; non è una stima. Il valor medio integrale introduce invece genuinamente un'approssimazione, coerente con il verbo *stimare*.

3. **«Tra il 2016 e il 2026»**: in italiano «tra A e B» riferito al tempo può significare *nell'arco di tempo compreso tra A e B*, non necessariamente un confronto tra due istanti. In questa lettura, la grandezza richiesta sarebbe una misura distribuita sull'intero decennio, non una differenza puntuale tra i due estremi.

Altri forniscono interpretazioni diverse, legittime vista l'ambiguità della formulazione ministeriale; noi abbiamo esposto la nostra interpretazione, cercando di motivarla.

Giuseppe Scoleri