

## LICEO SCIENTIFICO 2026 – PROBLEMA 1

In tabella sono indicati i rilevamenti, fatti a inizio anno a partire dal 2016, del livello dell'acqua del lago di Bracciano. Nel 2016 e nel 2017 il lago, oggetto di prelievi, era utilizzato come riserva idrica di emergenza per i comuni limitrofi e per l'approvvigionamento di Roma. Nel 2017, in considerazione dell'impatto ambientale e del notevole abbassamento del livello idrometrico rispetto a quello considerato ottimale, si è deciso di interrompere i prelievi, sospensione tuttora in atto.

Anno (1° genn.)	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Livello (dm)	-6	-16	-20	-18	-16	-14	-12	-10	-10	-10	-10

Legenda: valori in decimetri rispetto allo zero idrometrico, rilevati al 1° gennaio di ogni anno.

Si scelga un sistema di riferimento in cui l'unità sull'asse delle ascisse corrisponda a un anno e il 1° gennaio 2016 corrisponda allo zero, mentre sull'asse delle ordinate l'unità corrisponda a 1 dm rispetto allo zero idrometrico (livello ottimale).

Con buona approssimazione, dall'inizio del 2016 fino all'inizio del 2019, si può descrivere l'andamento del livello delle acque con il modello polinomiale

$$y = a(x - 2)^4 + b(x - 2)^3 + c(x - 2)^2 - 20, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Nel periodo tra l'inizio del 2019 e l'inizio del 2023 si assume una crescita oscillante, approssimata con un modello del tipo  $y = mx - 24 + \sin^2(\pi x)$ , con  $m \in \mathbb{R}$ . Poi, fino all'inizio del 2026, l'andamento può essere approssimato con un modello del tipo  $y = 2 \cos(2\pi x) + k$ , con  $k \in \mathbb{R}$ .

**a)** Utilizzando i dati riportati in tabella e le informazioni fornite, definire il modello matematico  $f(x)$  che esprime l'andamento del livello delle acque del lago in funzione del tempo, dopo aver determinato i valori dei parametri.

a)

### Determinazione di $a, b, c$ (tratto 2016–2019, $0 \leq x < 3$ )

Nel sistema di riferimento scelto: 2016 corrisponde a  $x = 0$ , 2017 a  $x = 1$ , 2018 a  $x = 2$ , 2019 a  $x = 3$ . Il modello ha tre parametri incogniti, quindi servono tre equazioni indipendenti, ottenute imponendo il passaggio per tre punti noti della tabella ( $x = 0, 1, 3$ ).

Per  $x = 0$ ,  $y = -6$ :

$$-6 = 16a - 8b + 4c - 20 \Rightarrow 16a - 8b + 4c = 14 \quad (1)$$

Per  $x = 1$ ,  $y = -16$ :

$$-16 = a - b + c - 20 \Rightarrow a - b + c = 4 \quad (2)$$

Nota: per  $x = 2$  si ha  $(x - 2) = 0$ , quindi il modello dà sempre  $y = -20$  qualunque siano  $a, b, c$  - il dato 2018 è automaticamente soddisfatto ma non utile a determinare i parametri. Serve quindi un terzo punto diverso, cioè  $x = 3$ .

Il valore  $y = -18$  è il dato misurato a inizio 2019 ( $x = 3$ ). Poiché il primo tratto è definito su  $[0, 3)$ , il valore corretto si ottiene come limite sinistro; essendo una funzione polinomiale, continua su  $\mathbb{R}$ , tale limite coincide con la sostituzione diretta di  $x = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 - 20] = -18 \implies a + b + c = 2 \quad (3)$$

Risolviendo il sistema. Sottraendo la (2) dalla (3):

$$(a + b + c) - (a - b + c) = 2 - 4 \implies 2b = -2 \implies b = -1$$

Dalla (3):  $a + c = 3$ , cioè  $c = 3 - a$ . Sostituendo nella (1):

$$16a + 8 + 12 - 4a = 14 \implies 12a = -6 \implies a = -\frac{1}{2}$$

Ricaviamo infine  $c = 3 - a = 3 - (-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$ .

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = \frac{7}{2}$$

### Determinazione di $m$ (tratto 2019–2023, $3 \leq x \leq 7$ )

Imponendo la continuità in  $x = 3$  con il valore  $y = -18$  già trovato:

$$-18 = 3m - 24 + \text{sen}^2(3\pi) = 3m - 24 \implies m = 2$$

$$\text{Per } 3 < x \leq 7: \quad y = 2x - 24 + \text{sen}^2(\pi x)$$

### Determinazione di $k$ (tratto 2023–2026, $7 < x \leq 10$ )

Usiamo il dato del 2024, cioè  $x = 8$ ,  $y = -10$ :

$$-10 = 2 \cos(16\pi) + k = 2 + k \implies k = -12$$

### Modello completo

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20, & 0 \leq x < 3 \\ 2x - 24 + \text{sen}^2(\pi x), & 3 \leq x \leq 7 \\ 2 \cos(2\pi x) - 12, & 7 < x \leq 10 \end{cases}$$

**b)** Si assuma come modello descrittivo dell'andamento idrometrico del lago la funzione  $f(x)$  definita a tratti al punto precedente. Studiare  $f$  e tracciare un suo grafico, dopo aver verificato la continuità, studiato la derivabilità e determinato i punti di estremo relativo.

b)

## Continuità

La funzione è costituita da tratti di funzioni continue su tutto  $\mathbb{R}$  (una polinomiale, una funzione goniometrica, un coseno), quindi basta verificare la continuità nei punti di raccordo  $x = 3$  e  $x = 7$ .

In  $x = 3$ : dal primo tratto  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{7}{2} - 20 = -18$ ; dal secondo tratto  $f(3) = 6 - 24 + \sin^2(3\pi) = -18$ . Coincidono: **f è continua in  $x = 3$** .

In  $x = 7$ : dal secondo tratto  $f(7) = 14 - 24 + \sin^2(7\pi) = -10$ ; dal terzo tratto  $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 2\cos(14\pi) - 12 = -10$ . Coincidono: **f è continua in  $x = 7$** . Quindi  $f$  è continua su tutto  $[0; 10]$ .

## Derivabilità

Ogni tratto è derivabile su tutto  $\mathbb{R}$ , quindi resta da controllare solo i punti di raccordo. Oltre alla continuità, serve che le derivate sinistra e destra coincidano: criterio sufficiente ma non necessario per la derivabilità.

In  $x = 3$ :  $f'(x) = -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2)$  dà  $f'_-(3) = -2 - 3 + 7 = 2$ ; dal secondo tratto  $f'(x) = 2 + \pi \sin(2\pi x)$  dà  $f'_+(3) = 2 + \pi \sin(6\pi) = 2$ . Coincidono: **f è derivabile in  $x = 3$** .

In  $x = 7$ :  $f'_-(7) = 2 + \pi \sin(14\pi) = 2$ ; dal terzo tratto  $f'(x) = -4\pi \sin(2\pi x)$  dà  $f'_+(7) = -4\pi \sin(14\pi) = 0$ . Sono diverse: **f NON è derivabile in  $x = 7$**  (punto angoloso).

## Primo tratto: $0 \leq x < 3$

$$f'(x) = -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2) = (x-2)[-2(x-2)^2 - 3(x-2) + 7]$$

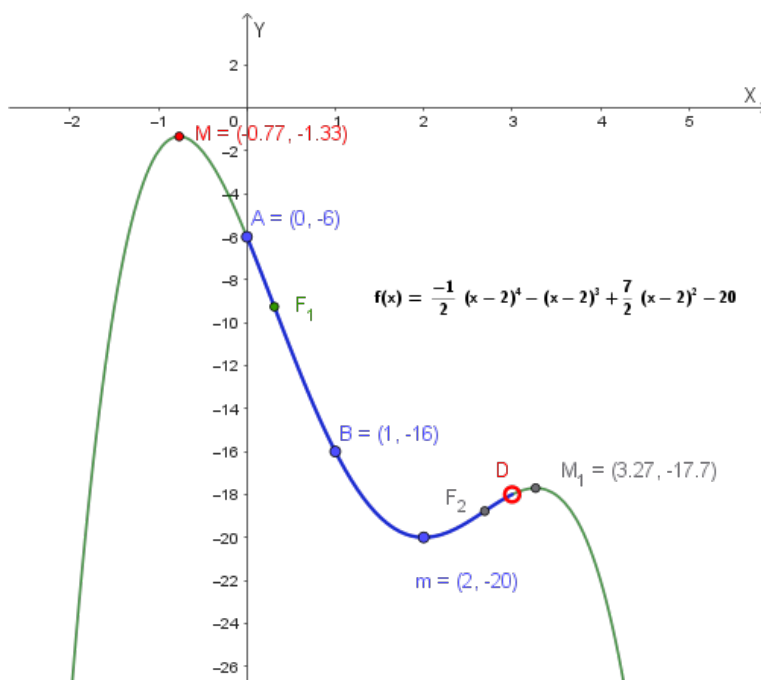
Sviluppando il trinomio  $g(x) = -2(x-2)^2 - 3(x-2) + 7$ :

$$g(x) = -2x^2 + 5x + 5$$

$\Delta = 25 + 40 = 65$ , radici  $x = \frac{5 \pm \sqrt{65}}{-4} \approx -0,77$  e  $\approx 3,27$ , entrambe fuori dal dominio  $[0, 3)$ . Essendo  $g$  una parabola con concavità verso il basso,  $g > 0$  su tutto  $[0, 3)$ . Quindi il segno di  $f'$  coincide con quello di  $(x-2)$ :  $f$  è decrescente per  $0 \leq x < 2$  e crescente per  $2 < x < 3$ .

$x = 2$ è punto di <b>minimo relativo</b> , con $f(2) = -20$ .
$x = 0$ è un <b>massimo di frontiera</b> , con $f(0) = -6$ .

Studiando  $f''(x) = -6(x-2)^2 - 6(x-2) + 7$  si trovano due flessi interni:  $x_1 \approx 0,31$  ( $f \approx -9,25$ ) e  $x_2 \approx 2,69$  ( $f \approx -18,77$ ), con concavità verso l'alto tra di essi e verso il basso altrove.



Legenda:  $A=(0, -6)$  massimo di frontiera,  $F_1 \approx (0,31; -9,25)$  e  $F_2 \approx (2,69; -18,77)$  flessi,  $m=(2, -20)$  minimo,  $D=(3, -18)$  estremo del tratto.

## Secondo tratto: $3 \leq x \leq 7$

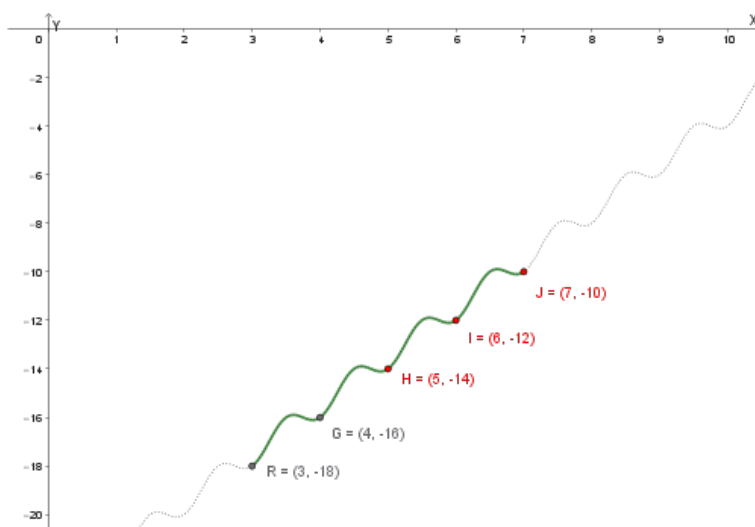
$$f'(x) = 2 + \pi \operatorname{sen}(2\pi x)$$

Poiché  $\pi \operatorname{sen}(2\pi x)$  oscilla tra  $-\pi$  e  $\pi$ ,  $f'$  non ha segno costante: piccole oscillazioni periodiche di periodo 1. Risolvendo  $f'(x) = 0$ :

$$2 + \pi \operatorname{sen}(2\pi x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(2\pi x) = -\frac{2}{\pi} \approx -0,64$$

Si trovano le soluzioni periodiche  $x \approx n + 0,61$  e  $x \approx n + 0,89$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Restrungendo a  $[3, 7]$  ( $n = 3, 4, 5, 6$ ): 8 punti critici. Ogni  $x \approx n + 0,61$  è un massimo relativo, ogni  $x \approx n + 0,89$  un minimo relativo.

4 massimi relativi ( $x \approx n + 0,61$ ) e 4 minimi relativi ( $x \approx n + 0,89$ ), per  $n = 3, 4, 5, 6$ . Oscillazione di soli 0,2 dm rispetto al trend lineare  $2x - 24$ .



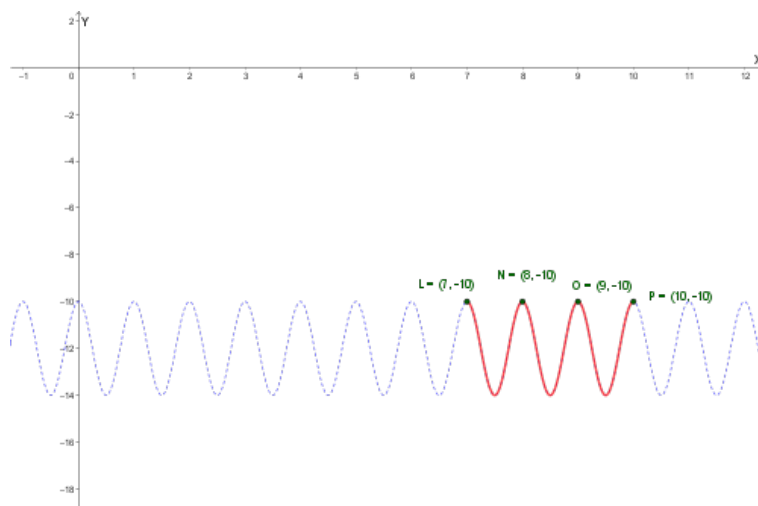
Legenda: crescita con piccole oscillazioni; punti interi  $R=(3, -18)$ ,  $G=(4, -16)$ ,  $H=(5, -14)$ ,  $I=(6, -12)$ ,  $J=(7, -10)$ .

### Terzo tratto: $7 < x \leq 10$

Coseno di periodo 1, dilatato verticalmente di un fattore 2 e traslato in basso di 12: oscilla tra  $-10$  (max) e  $-14$  (min).

$$f'(x) = -4\pi \operatorname{sen}(2\pi x)$$

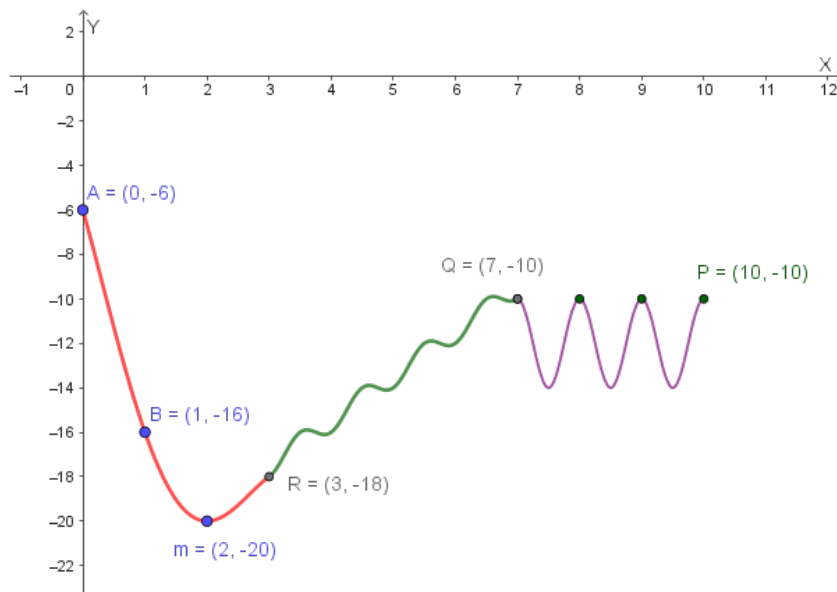
Massimi relativi in  $x = 8, 9$  (e di frontiera in  $x = 10$ ), con  $f = -10$ . Minimi relativi in  $x = 7,5; 8,5; 9,5$ , con  $f = -14$ .



Legenda:  $L=(7, -10)$ ,  $N=(8, -10)$ ,  $O=(9, -10)$ ,  $P=(10, -10)$  massimi relativi; minimi in  $x = 7,5; 8,5; 9,5$ .

### Grafico complessivo

Unendo i tre tratti — continui ovunque, con un punto angoloso in  $x = 7$  — si ottiene il grafico complessivo di  $f$  su  $[0; 10]$ :



Legenda: in rosso il 1° tratto ( $A=(0, -6)$ ,  $m=(2, -20)$ ), in verde il 2°, in viola il 3°, punto angoloso in  $Q=(7, -10)$ .

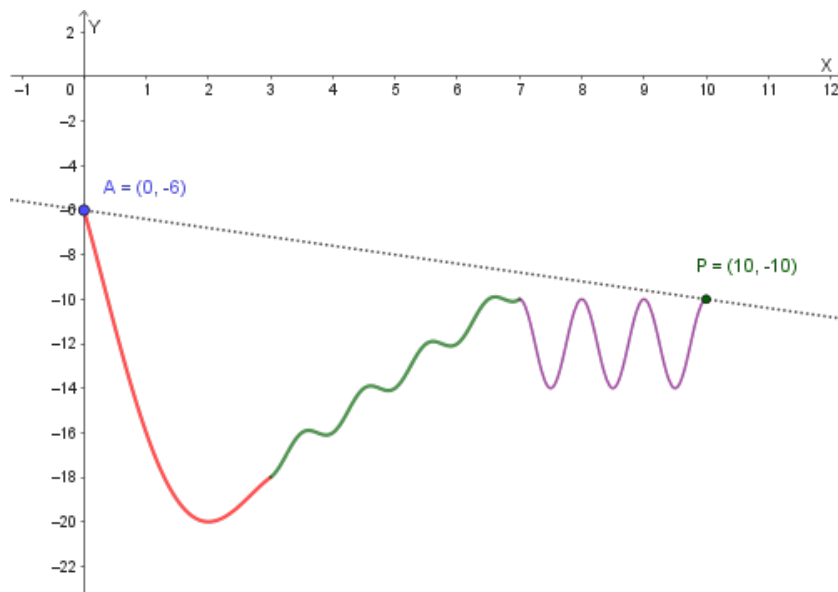
c) Giustificare la non applicabilità del teorema di Lagrange alla funzione  $f$  in  $[0; 10]$ . Esistono, tuttavia, punti di ascissa  $s \in ]0; 10[$  tali che  $f'(s) = \frac{f(10) - f(0)}{10}$ ? Motivare la risposta.

c)

### Non applicabilità del teorema di Lagrange

Il teorema di Lagrange richiede che  $f$  sia continua su  $[0; 10]$  e **derivabile su tutto l'intervallo aperto**  $]0; 10[$ . La prima condizione è verificata (punto b). La seconda no:  $f$  non è derivabile in  $x = 7$  (punto angoloso), e  $7 \in ]0; 10[$ . Mancando un'ipotesi del teorema, **il teorema di Lagrange non è applicabile su**  $[0; 10]$ .

### Significato geometrico della domanda



Legenda:  $A=(0, -6)$  e  $P=(10, -10)$ , estremi della funzione; la retta tratteggiata è la secante  $AP$ , di coefficiente angolare  $-0,4$ .

Il rapporto richiesto vale:

$$\frac{f(10) - f(0)}{10} = \frac{-10 - (-6)}{10} = -0,4$$

È il coefficiente angolare della secante  $AP$  tra  $A = (0; -6)$  e  $P = (10; -10)$ . Chiedersi se esiste  $s$  con  $f'(s) = -0,4$  equivale a chiedersi se in qualche punto la tangente è **parallela** alla secante  $AP$ .

Non potendo usare Lagrange sull'intero intervallo,  $f$  è comunque continua e derivabile separatamente sui tre tratti  $[0; 3]$ ,  $[3; 7]$ ,  $[7; 10]$ : il teorema vale quindi su ciascuno di essi.

### Conclusione tramite il teorema dei valori intermedi

*Primo tratto:*  $f'$  è continua su  $]0; 3[$  e assume sia valori minori di  $-0,4$  (es.  $f'(0) = -10$ ) sia maggiori (es.  $f'(3) = 2$ ): esiste almeno un punto con  $f'(s) = -0,4$ .

*Secondo e terzo tratto:*  $f'$  oscilla periodicamente, rispettivamente tra circa  $-1,14$  e  $5,14$ , e tra circa  $-12,57$  e  $12,57$ : intervalli che contengono ampiamente  $-0,4$ , quindi la pendenza viene assunta più volte.

Sì: esistono punti  $s \in ]0; 10[$  con  $f'(s) = -0,4$  — in totale **15 valori**, a causa delle oscillazioni periodiche del modello.

### Calcolo dei valori di $s$

Primo tratto:  $s \approx 1,94$ .

Secondo tratto: da  $\sin(2\pi x) \approx -0,764$ , in  $]3; 7[$ :  $s \approx 3,64; 3,86; 4,64; 4,86; 5,64; 5,86; 6,64; 6,86$ .

Terzo tratto: da  $\sin(2\pi x) \approx 0,032$ , in  $]7; 10[$ :  $s \approx 7,01; 7,49; 8,01; 8,49; 9,01; 9,49$ .

In totale **15 valori** di  $s$  soddisfano la condizione richiesta.

d) Spiegare perché il teorema della Media Integrale è applicabile alla funzione  $f$  in  $[0; 10]$ . Calcolare, quindi, la variazione media  $\Delta h$  del livello delle acque del lago negli anni presi in esame. Infine, considerando che la superficie del lago è di circa  $57 \text{ km}^2$ , utilizzare  $\Delta h$  per stimare, in litri, la differenza del volume di acqua tra l'inizio del 2016 e l'inizio del 2026.

d)

$f$  è continua in  $[0; 10]$  (punto b), quindi è applicabile il teorema della media integrale: il valor medio  $\Delta h$  è dato da

$$\Delta h = \frac{1}{10 - 0} \int_0^{10} f(x) dx$$

### Calcolo dell'integrale, tratto per tratto

Primo tratto:

$$\int_0^3 f(x) dx = \left[ -\frac{1}{10}(x-2)^5 - \frac{1}{4}(x-2)^4 + \frac{7}{6}(x-2)^3 - 20x \right]_0^3 = -49,05$$

Secondo tratto:

$$\int_3^7 f(x) dx = \left[ x^2 - \frac{47}{2}x - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{4\pi} \right]_3^7 = -54$$

Terzo tratto:

$$\int_7^{10} f(x) dx = \left[ \frac{\text{sen}(2\pi x)}{\pi} - 12x \right]_7^{10} = -36$$

Sommando i tre contributi:

$$\int_0^{10} f(x) dx = -49,05 - 54 - 36 = -139,05$$

$$\Delta h = \frac{-139,05}{10} = -13,905 \text{ dm} = -1,3905 \text{ m}$$

Nel decennio 2016–2026 il livello del lago si è attestato in media a circa 1,39 m al di sotto dello zero idrometrico ottimale.

### Stima della differenza di volume d'acqua

Superficie del lago:  $S = 57 \text{ km}^2 = 57 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ . Il volume medio mancante rispetto alla condizione ottimale è:

$$V = S \cdot |\Delta h| = 57 \cdot 10^6 \cdot 1,3905 \approx 7,93 \cdot 10^7 \text{ m}^3$$

Convertendo in litri ( $1 \text{ m}^3 = 1000$  litri):

$$V \approx 7,93 \cdot 10^{10} \text{ litri}$$

In base al modello della media integrale, nel periodo considerato è mancato un volume medio complessivo di circa **79,3 miliardi di litri** rispetto allo zero idrometrico ottimale.



**Nota di commento geometrico.**  $\Delta h = -13,905$  dm è il **valore medio** del livello nel decennio (non la variazione tra il 2016 e il 2026): da qui la stima  $V \approx 7,93 \cdot 10^{10}$  litri, come richiesto dal testo.

Se invece si considerasse la variazione puntuale  $f(10) - f(0) = -4$  dm, si otterrebbe  $V \approx 2,28 \cdot 10^{10}$  litri. Questa interpretazione, secondo noi, non è quella intesa dal testo.

**Approfondimento interpretativo.** L'interpretazione adottata si rafforza considerando tre elementi convergenti del testo ministeriale:

1. **«Utilizzare  $\Delta h$ »:** se il testo avesse voluto la differenza puntuale  $f(10) - f(0)$ , non avrebbe avuto bisogno di richiedere esplicitamente l'uso del valor medio integrale — quel valore si legge direttamente dalla tabella senza alcun integrale.
2. **«Stimare»:** la differenza  $f(10) - f(0) = -4$  dm è un dato esatto ricavabile dalla tabella; non è una stima. Il valor medio integrale introduce invece genuinamente un'approssimazione, coerente con il verbo *stimare*.
3. **«Tra il 2016 e il 2026»:** in italiano «tra A e B» riferito al tempo può significare *nell'arco di tempo compreso tra A e B*, non necessariamente un confronto tra due istanti. In questa lettura, la grandezza richiesta sarebbe una misura distribuita sull'intero decennio, non una differenza puntuale tra i due estremi.

Altri forniscono interpretazioni diverse, legittime vista l'ambiguità della formulazione ministeriale; noi abbiamo esposto la nostra interpretazione, cercando di motivarla.

Giuseppe Scoleri