LICEO SCIENTIFICO 2026 – PROBLEMA 2

Siano φ_a e γ, rispettivamente, i grafici rappresentativi delle funzioni:

$$f_a(x) = \frac{ax^2}{x-1}, \quad \text{con } a \neq 0 \qquad\qquad g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) Al variare del parametro a, studiare gli intervalli di monotonia della funzione f_a. Considerata la retta r, di equazione $y = k$ $(k \in \mathbb{R})$, determinare i valori di a e k in modo che r risulti tangente ai grafici φ_a e γ.

a)

Monotonia di f_a

Il dominio di f_a è $x \neq 1$. La funzione è derivabile in tutto il dominio:

$$f_a'(x) = \frac{2ax(x-1) - ax^2}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno di f_a' coincide con il segno di $a\,x(x-2)$.

Caso $a > 0$: $f_a'(x) > 0$ per $x < 0 \;\vee\; x > 2$ (f crescente), $f_a'(x) < 0$ per $0 < x < 2$ (f decrescente, con discontinuità in $x = 1$). Quindi $x = 0$ è punto di **massimo relativo** e $x = 2$ è punto di **minimo relativo**.

Caso $a < 0$: il segno si inverte: f_a è decrescente per $x < 0 \;\vee\; x > 2$ e crescente per $0 < x < 2$ $(x \neq 1)$; $x = 0$ è punto di **minimo relativo** e $x = 2$ di **massimo relativo**.

Retta $y = k$ tangente a φ_a e a γ

Una retta orizzontale $y = k$ è tangente al grafico di una funzione derivabile esattamente nei suoi punti stazionari (dove la tangente è orizzontale).

Studiamo allora $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$: per $x > 0$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ e

$$g'(x) = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

che si annulla per $x = 1$ (massimo relativo, con $g(1) = \frac{1}{2}$). Essendo g una funzione pari, per simmetria anche $x = -1$ è un massimo relativo con lo stesso valore $g(-1) = \frac{1}{2}$. Nel punto $x = 0$ la funzione presenta invece un punto angoloso (a causa del modulo), quindi non è derivabile e non vi è tangente orizzontale.

Dunque γ ammette tangenti orizzontali solo per $k = \dfrac{1}{2}$ (nei punti $x = \pm 1$).

Per φ_a, i punti stazionari sono $x = 0$ (con $f_a(0) = 0$) e $x = 2$ (con $f_a(2) = 4a$). Per avere la stessa retta tangente $y = k = \dfrac{1}{2}$, deve essere:

$$4a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{8}$$

(il valore $f_a(0) = 0$ non può infatti coincidere con $k = \frac{1}{2}$).

$a = \frac{1}{8}, \qquad k = \frac{1}{2}$

b) Siano A e B i punti stazionari, rispettivamente, dei grafici φ_a e γ, con $x_A \neq 0$ e $x_B > 0$. Determinare il valore di a in corrispondenza del quale la misura del segmento AB risulti minima.
D'ora in avanti, si ponga $a = \frac{1}{8}$.

b)

In base a quanto detto al punto a), i punti stazionari di f_a sono $x = 0$ e $x = 2$: poiché $x_A \neq 0$, si ha $x_A = 2$, da cui $A = (2; 4a)$.

I punti stazionari di g sono $x = -1$ e $x = 1$: poiché $x_B > 0$, si ha $x_B = 1$, da cui $B = \left(1; \frac{1}{2}\right)$.

La misura del segmento AB è:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + \left(4a - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(4a - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Questa è una funzione di a, minima quando è minimo il radicando, cioè quando il termine $\left(4a - \frac{1}{2}\right)^2$ (sempre ≥ 0) si annulla:

$$4a - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{8}$$

In corrispondenza di tale valore, $\overline{AB}$ assume il valore minimo $\overline{AB} = \sqrt{1} = 1$.

$a = \frac{1}{8}$ (segmento AB minimo, di misura 1)

c) Studiare le funzioni $f_{\frac{1}{8}}$ e g, esaminandone in particolare la continuità e la derivabilità, e tracciare i loro grafici $\varphi_{\frac{1}{8}}$ e γ in un medesimo sistema di riferimento. Utilizzare tali grafici per risolvere la disequazione $f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x)$.

c)

Per $a = \frac{1}{8}$:

$$f_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{x^2}{8(x-1)}, \qquad g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

Studio di $f_{\frac{1}{8}}(x)$

Dominio: $x \neq 1$. *Continuità e derivabilità*: f è continua e derivabile in tutto il dominio (rapporto di polinomi con denominatore non nullo).

Intersezioni con gli assi e segno: $f(0) = 0$ (unico punto di intersezione, con entrambi gli assi). Poiché $x^2 \geq 0$, il segno di f coincide con quello di $(x-1)$: $f(x) < 0$ per $x < 1$, $x \neq 0$; $f(x) = 0$ per $x = 0$; $f(x) > 0$ per $x > 1$.

Asintoti: verticale $x = 1$ (con $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$).

Asintoto obliquo, con il metodo classico $y = mx + q$:

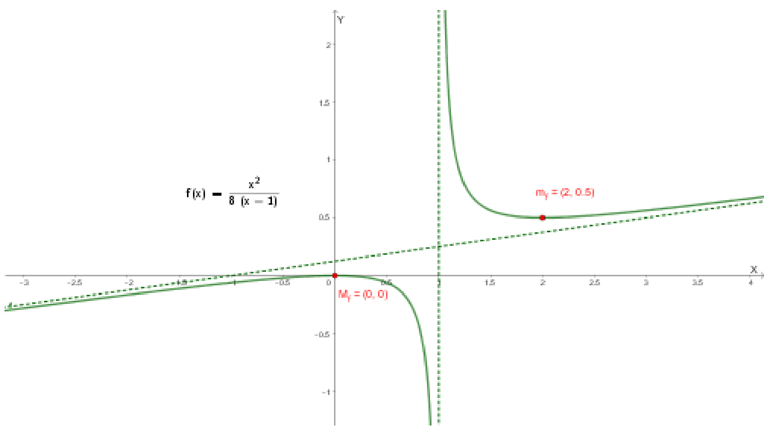
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{8x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{8(x-1)} = \frac{1}{8}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{8(x-1)} - \frac{x}{8}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{8(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{8(x-1)} = \frac{1}{8}$$

Quindi l'asintoto obliquo è $y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} = \frac{x+1}{8}$ (per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$).

Monotonia: già vista al punto a) con $a = \frac{1}{8} > 0$: crescente per $x < 0$ o $x > 2$, decrescente per $0 < x < 2$ ($x \neq 1$); massimo relativo in $x = 0$ ($f = 0$), minimo relativo in $x = 2$ ($f = \frac{1}{2}$).

Concavità: $f''(x) = \frac{1}{4(x-1)^3}$, mai nulla: concava verso il basso per $x < 1$, verso l'alto per $x > 1$ – **nessun punto di flesso**.



Legenda: massimo relativo in (0,0), minimo relativo in (2; 0,5), asintoto verticale $x = 1$, asintoto obliquo $y = (x+1)/8$.

Osservazione. La funzione $f_{\frac{1}{8}}(x) = \dfrac{x^2}{8(x-1)}$ rappresenta un'iperbole. Infatti, riscrivendola come $y = \dfrac{x^2}{8(x-1)}$ e riducendola a forma intera otteniamo:

$$8y(x-1) = x^2 \implies x^2 - 8xy + 8y = 0$$

che è l'equazione di una conica. Dato che la funzione f ammette due asintoti, essa rappresenta un'iperbole (l'unica conica a possedere asintoti).

Studio di $g(x)$

Dominio: $\mathbb{R}$. Essendo g **pari** ($g(-x) = g(x)$), basta studiarla per $x \geq 0$ e ribaltare il grafico rispetto all'asse y.

Per $x > 0$: $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, continua e derivabile, con $g(0) = 0$ e $g(x) > 0$ per $x > 0$.

Asintoti: orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$.

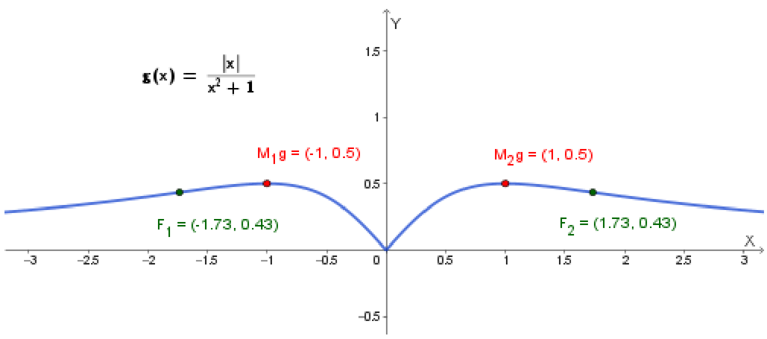
$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

positiva per $0 < x < 1$, negativa per $x > 1$: **massimo relativo in** $x = 1$, con $g(1) = \dfrac{1}{2}$.

$$g''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

negativa per $0 < x < \sqrt{3}$ (concava verso il basso), positiva per $x > \sqrt{3}$ (concava verso l'alto): **punto di flesso in** $x = \sqrt{3}$, con $g(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43$.

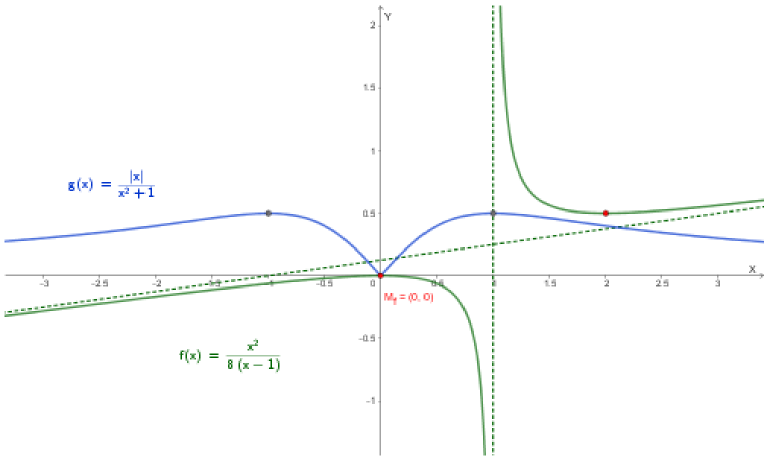
Per simmetria pari, in $x = 0$ si ha $g'(0^+) = 1$ e $g'(0^-) = -1$: le due derivate laterali sono diverse e finite, quindi g **è continua ma non derivabile in** $x = 0$ (punto angoloso, minimo assoluto). Per $x < 0$ si ottengono, per simmetria, un massimo relativo in $x = -1$ ($g = \dfrac{1}{2}$) e un flesso in $x = -\sqrt{3}$ ($g = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$).



Legenda: punto angoloso (minimo assoluto) nell'origine; $M_1 = (-1; 0{,}5)$ e $M_2 = (1; 0{,}5)$ massimi relativi; $F_1 = (-1{,}73; 0{,}43)$ e $F_2 = (1{,}73; 0{,}43)$ punti di flesso; asintoto orizzontale $y = 0$.

Risoluzione grafica della disequazione $f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x)$

Sovrapponendo i due grafici:



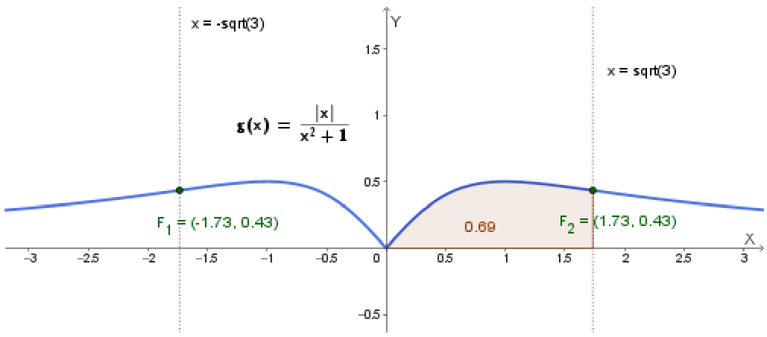
Legenda: in blu $\varphi_{1/8}$, in verde γ. Per $x < 1$ si ha $f \leq 0 \leq g$ (con uguaglianza solo in $x = 0$); per $x > 1$ il ramo di f, che tende a $+\infty$, supera definitivamente g (che resta limitata, con massimo 0,5).

Si osserva infatti che, per $x < 1$ ($x \neq 0$), $f(x) < 0 < g(x)$: quindi $f < g$; in $x = 0$ i due grafici si toccano ($f(0) = g(0) = 0$); per $x > 1$, $f(x) > 0$ e cresce rapidamente verso $+\infty$ (asintoto verticale), mentre $g(x)$ resta limitata, quindi il grafico di f supera definitivamente quello di g.

$$f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x) \iff x > 1$$

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ, dall'asse x e dalle rette parallele all'asse y passanti per i punti di flesso.

d)



Legenda: $F_1 = (-\sqrt{3}; 0{,}43)$ e $F_2 = (\sqrt{3}; 0{,}43)$ punti di flesso; in rosa la regione (simmetrica) di cui calcolare l'area.

I punti di flesso di g, trovati al punto c), sono $x = \pm\sqrt{3}$. La regione richiesta è quindi delimitata da γ, dall'asse x e dalle rette $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$.

Poiché g è **pari** e **non negativa**:

$$\text{Area} = 2\int_0^{\sqrt{3}} g(x)\,dx$$

Per $x > 0$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; calcoliamo la primitiva:

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

Quindi:

$$\text{Area} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^{\sqrt{3}} = \ln 4 - \ln 1$$

$$\boxed{\text{Area} = \ln 4 = 2\ln 2 \approx 1{,}39\ \text{u}^2}$$

Giuseppe Scoleri