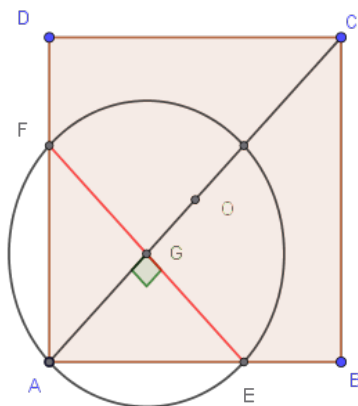


LICEO SCIENTIFICO 2026 – QUESTIONARIO

Quesito 1

Cecilia mostra a Nicolò una variante del gioco “Cover the spot”: disegna su un foglio un quadrato $ABCD$ di lato $\sqrt{2}$ dm e poi ritaglia tre cartoncini circolari di raggio $\frac{2}{3}$ dm. Lo scopo del gioco è quello di coprire, con i tre cerchi, la maggior parte possibile del quadrato. Cecilia posiziona inizialmente un cartoncino in modo che il centro sia sulla diagonale AC del quadrato e il bordo passi per A . Prima di posizionare il secondo cartoncino, afferma che ha già coperto più della metà del quadrato, mentre Nicolò dice che non è così. Chi ha ragione? Motivare la risposta.

Soluzione



Legenda: G centro del cerchio (sulla diagonale AC , con $\overline{AG} = r$),
 F ed E punti di intersezione del cerchio con i lati AD e AB .

Il lato del quadrato è $\overline{AB} = \sqrt{2}$ dm, quindi la diagonale misura:

$$\overline{AC} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \text{ dm}$$

Il centro G del primo cartoncino sta sulla diagonale, a distanza $\overline{AG} = r = \frac{2}{3}$ dm da A (poiché il bordo passa per A). Il cerchio interseca i lati AD e AB rispettivamente in F ed E .

Per la simmetria della figura rispetto alla diagonale AC (bisettrice dell'angolo retto in A), il segmento FE passa per il centro G – è quindi un **diametro** – ed è **perpendicolare** alla diagonale AC in G .

Questo diametro FE divide il cerchio in due semicerchi:

- il semicerchio dalla parte opposta ad A rispetto a FE , che sta **interamente dentro** il quadrato;
- il semicerchio dalla parte di A , che viene tagliato dai lati AD e AB : la parte di questo semicerchio che resta **dentro** il quadrato è esattamente il **triangolo** AFE (essendo A il punto medio dell'arco FAE , per costruzione).



L'area coperta dal primo cartoncino all'interno del quadrato è quindi:

$$\text{Area}_{\text{coperta}} = \frac{1}{2}\pi r^2 + \text{Area}(\triangle AFE)$$

Calcoliamo l'area del triangolo AFE usando come base il diametro $\overline{FE} = 2r = \frac{4}{3}$ e come altezza la distanza $\overline{AG} = r = \frac{2}{3}$ (essendo $AG \perp FE$):

$$\text{Area}(\triangle AFE) = \frac{\overline{FE} \cdot \overline{AG}}{2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{8/9}{2} = \frac{4}{9}$$

Quindi:

$$\text{Area}_{\text{coperta}} = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9} = \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{9} = \frac{2\pi + 4}{9} \approx 1,14 \text{ dm}^2$$

L'area del quadrato è $\overline{AB}^2 = 2 \text{ dm}^2$, quindi metà quadrato = 1 dm^2 .

Poiché $\frac{2\pi + 4}{9} \approx 1,14 > 1$, il primo cartoncino, da solo, copre già **più della metà** del quadrato.

Ha ragione **Cecilia**.



Quesito 2

Si considerino, nello spazio tridimensionale, i punti $A(2; -4; 3)$, $B(3; 5; -1)$, $C(-6; 1; 0)$, $D(-1; 4; 8)$.

a) Verificare che A, B, C, D sono i vertici di un tetraedro regolare.

b) Determinare l'equazione del piano tangente in A alla superficie sferica passante per i punti A, B, C, D .

a) Tetraedro regolare

Per verificare che $ABCD$ sia un tetraedro regolare basta dimostrare che tutti gli spigoli sono uguali, cioè $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$. Calcoliamo i quadrati delle distanze:

$$\overline{AB}^2 = (3 - 2)^2 + (5 + 4)^2 + (-1 - 3)^2 = 1 + 81 + 16 = 98$$

$$\overline{AC}^2 = (-6 - 2)^2 + (1 + 4)^2 + (0 - 3)^2 = 64 + 25 + 9 = 98$$

$$\overline{AD}^2 = (-1 - 2)^2 + (4 + 4)^2 + (8 - 3)^2 = 9 + 64 + 25 = 98$$

$$\overline{BC}^2 = (-6 - 3)^2 + (1 - 5)^2 + (0 + 1)^2 = 81 + 16 + 1 = 98$$

$$\overline{BD}^2 = (-1 - 3)^2 + (4 - 5)^2 + (8 + 1)^2 = 16 + 1 + 81 = 98$$

$$\overline{CD}^2 = (-1 + 6)^2 + (4 - 1)^2 + (8 - 0)^2 = 25 + 9 + 64 = 98$$

Tutti gli spigoli sono uguali: $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

$ABCD$ è un **tetraedro regolare** di spigolo $7\sqrt{2}$.

b) Piano tangente in A alla superficie sferica

Trattandosi di un tetraedro regolare, il centro O della sfera circoscritta coincide con il **baricentro** dei quattro vertici:

$$O = \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right)$$

$$O = \left(\frac{2 + 3 - 6 - 1}{4}; \frac{-4 + 5 + 1 + 4}{4}; \frac{3 - 1 + 0 + 8}{4} \right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right)$$

Verifica (le distanze al quadrato da O sono tutte uguali, pari al raggio al quadrato R^2):

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 = 36,75$$

Il piano tangente alla sfera in A è perpendicolare al raggio \overrightarrow{AO} nel punto A : il vettore \overrightarrow{AO} è quindi il vettore normale al piano.

$$\overrightarrow{AO} = O - A = \left(-\frac{1}{2} - 2; \frac{3}{2} + 4; \frac{5}{2} - 3 \right) = \left(-\frac{5}{2}; \frac{11}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

Moltiplicando per 2 (per semplicità) si ottiene il vettore normale $(a, b, c) = (-5; 11; -1)$. L'equazione del piano per A con tale normale è:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$-5(x - 2) + 11(y + 4) - 1(z - 3) = 0$$

$$-5x + 10 + 11y + 44 - z + 3 = 0$$

Equazione del piano tangente: $5x - 11y + z - 57 = 0$



Quesito 3

Nel 1976, 50 anni fa, due scosse di terremoto, a maggio e a settembre, di magnitudo $M_1 = 6,5$ e $M_2 = 6,0$ della scala Richter, colpirono un vasto territorio a nord di Udine.

La magnitudo M di un terremoto, secondo la scala Richter, è data da $M = \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)$, dove A rappresenta il massimo delle ampiezze registrate da un sismografo e A_0 è un'ampiezza di riferimento. Si determini il rapporto $\frac{A_1}{A_2}$ tra le ampiezze prodotte dai due eventi sismici friulani.

Dalla legge empirica di Gutenberg-Richter $\log_{10} \frac{E}{E_0} = 1,5M + 4,8$, dove E è l'energia liberata dal terremoto ed E_0 un'energia di riferimento, si determini la variazione percentuale dell'energia liberata tra il primo e il secondo terremoto.

Rapporto tra le ampiezze

Dalla definizione $M = \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)$, per i due terremoti:

$$M_1 = \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_0} \right) \Rightarrow \frac{A_1}{A_0} = 10^{M_1} \quad M_2 = \log_{10} \left(\frac{A_2}{A_0} \right) \Rightarrow \frac{A_2}{A_0} = 10^{M_2}$$

Quindi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1/A_0}{A_2/A_0} = \frac{10^{M_1}}{10^{M_2}} = 10^{M_1 - M_2} = 10^{6,5 - 6,0} = 10^{0,5}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = 10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

Variazione percentuale dell'energia

Dalla legge di Gutenberg-Richter $\log_{10} \frac{E}{E_0} = 1,5M + 4,8$, per i due terremoti:

$$\log_{10} \frac{E_1}{E_0} = 1,5 M_1 + 4,8 = 1,5 \cdot 6,5 + 4,8 = 9,75 + 4,8 = 14,55$$

$$\log_{10} \frac{E_2}{E_0} = 1,5 M_2 + 4,8 = 1,5 \cdot 6,0 + 4,8 = 9 + 4,8 = 13,8$$

Quindi, analogamente al caso precedente:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{14,55 - 13,8} = 10^{0,75} \approx 5,623$$

La variazione percentuale dell'energia tra il primo e il secondo terremoto è:

$$\frac{E_2 - E_1}{E_1} \cdot 100 = \left(\frac{E_2}{E_1} - 1 \right) \cdot 100 = \left(\frac{1}{10^{0,75}} - 1 \right) \cdot 100 \approx (0,1778 - 1) \cdot 100 \approx -82,2\%$$

L'energia liberata dal secondo terremoto è stata circa l'82,2% in meno rispetto al primo (variazione percentuale $\approx -82,2\%$).



Quesito 4

Si consideri la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$ (con $x > 0$).

Dimostrare che la funzione $F(x)$ è una funzione costante e calcolarne il valore.

Soluzione

Per $x > 0$, entrambi gli integrali sono ben definiti (l'integrando $\frac{1}{1+t^2}$ è continuo su tutto \mathbb{R}). Deriviamo F , usando il teorema fondamentale del calcolo integrale e, per il secondo termine, la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot D\left(\frac{1}{x}\right)$$

Calcoliamo il secondo addendo, ricordando che $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Quindi:

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \text{per ogni } x > 0$$

Poiché $F'(x) = 0$ su tutto l'intervallo $]0; +\infty[$, per il **corollario del teorema di Lagrange** (una funzione con derivata identicamente nulla su un intervallo è costante su quell'intervallo), $F(x)$ è **costante** per $x > 0$.

Calcolo del valore della costante

Essendo F costante, possiamo calcolarne il valore scegliendo un punto comodo, ad esempio $x = 1$ (per cui $\frac{1}{x} = 1$ e i due integrali coincidono):

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

Ricordando che una primitiva di $\frac{1}{1+t^2}$ è $\arctan(t)$:

$$F(1) = 2 \left[\arctan(t) \right]_0^1 = 2(\arctan(1) - \arctan(0)) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{per ogni } x > 0$$



Quesito 5

Determinare i valori dei parametri reali h, k , con $h \neq 0$, in modo che la curva di equazione $y = h \ln(x^2 + k)^5$ abbia le rette $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ come asintoti verticali e le rette tangenti nei punti A e B di intersezione con l'asse delle ascisse si incontrino in $C(0; -4)$.

Determinazione di k

Per avere asintoti verticali in $x = \pm\sqrt{3}$, l'argomento del logaritmo $(x^2 + k)^5$ deve annullarsi proprio in tali valori:

$$(3 + k)^5 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -3$$

La curva diventa quindi:

$$y = h \ln(x^2 - 3)^5$$

con dominio $x^2 - 3 > 0$, cioè $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$ (dove $x^2 - 3 > 0$, quindi è lecito scrivere $\ln(x^2 - 3)^5 = 5 \ln(x^2 - 3)$).

Punti A e B (intersezioni con l'asse x)

$$y = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)^5 = 1 \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Quindi $A(-2; 0)$ e $B(2; 0)$ (entrambi nel dominio, essendo $4 > 3$).

Rette tangenti in A e B

Scriviamo $y = 5h \ln(x^2 - 3)$ e calcoliamo la derivata:

$$y' = 5h \cdot \frac{2x}{x^2 - 3}$$

Nei punti A e B :

$$y'(-2) = 5h \cdot \frac{-4}{4 - 3} = -20h \qquad y'(2) = 5h \cdot \frac{4}{4 - 3} = 20h$$

Le rette tangenti sono quindi:

$$t_A : y = -20h(x + 2) \qquad t_B : y = 20h(x - 2)$$

Imposizione del passaggio per $C(0; -4)$

Sostituendo le coordinate di C in t_A :

$$-4 = -20h(0 + 2) = -40h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{10}$$

Verifichiamo con t_B :

$$-4 = 20h(0 - 2) = -40h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{10}$$

Le due condizioni sono coerenti (entrambe le tangenti passano per C con lo stesso valore di h).

$$k = -3, \quad h = \frac{1}{10}$$



Quesito 6

Determinare l'espressione del polinomio $p(x)$ tale che il grafico della funzione $f(x) = \frac{p(x)}{2x+1}$ passi per il punto $P(1;0)$ e abbia per asintoto obliquo la retta di equazione $y = 3x - 2$.

Soluzione

Perché f abbia un asintoto obliquo, il numeratore $p(x)$ deve essere un polinomio di **secondo grado** (un grado in più del denominatore). Inoltre, poiché l'asintoto ha coefficiente angolare $m = 3$ e $f(x) \sim \frac{p(x)}{2x}$ per $x \rightarrow \infty$, il coefficiente di x^2 in $p(x)$ deve essere $2 \cdot 3 = 6$. Poniamo quindi:

$$p(x) = 6x^2 + bx + c$$

Condizione di passaggio per $P(1;0)$

Da $f(1) = 0$ (con $2 \cdot 1 + 1 = 3 \neq 0$) segue $p(1) = 0$:

$$0 = 6 + b + c \quad \Rightarrow \quad b + c = -6$$

Condizione sull'asintoto obliquo

Il termine noto $q = -2$ dell'asintoto si trova imponendo:

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2 + bx + c}{2x + 1} - 3x \right) = -2$$

Riducendo a denominatore comune:

$$\frac{6x^2 + bx + c - 3x(2x + 1)}{2x + 1} = \frac{6x^2 + bx + c - 6x^2 - 3x}{2x + 1} = \frac{(b - 3)x + c}{2x + 1}$$

Per $x \rightarrow \infty$, questo rapporto tende a $\frac{b - 3}{2}$. Imponendo che valga -2 :

$$\frac{b - 3}{2} = -2 \quad \Rightarrow \quad b = -4 + 3 = -1$$

Determinazione di c

Dalla relazione $b + c = -6$:

$$c = -6 - b = -6 - (-1) = -5$$

$$p(x) = 6x^2 - x - 5$$



Quesito 7

Giuseppe, Lorenzo, Massimo e Vincenzo sono impegnati in una partita di scopone. All'inizio del gioco, a ciascun giocatore vengono casualmente distribuite 10 carte di un mazzo da 40 (diviso in 4 semi: bastoni, coppe, denari e spade).

- Determinare la probabilità che le prime 3 carte distribuite a Massimo siano tutte e 3 di coppe.
- Determinare la probabilità che, tra le 10 carte distribuite a Lorenzo, siano presenti i 3 assi di bastoni, spade e denari.

a) Tre carte di coppe a Massimo

Metodo 1 – rapporto tra combinazioni. È come chiedersi: estraendo 3 carte dal mazzo di 40, qual è la probabilità che siano tutte e tre di coppe (10 carte su 40)?

$$P(3 \text{ di coppe}) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{40 \cdot 39 \cdot 38}$$

Metodo 2 – probabilità composta (carta per carta). Equivalentemente, si moltiplicano le probabilità successive: la 1^a carta di coppe (10 su 40), la 2^a di coppe (9 rimaste su 39), la 3^a di coppe (8 rimaste su 38):

$$P(3 \text{ di coppe}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38}$$

Entrambi i metodi danno, ovviamente, lo stesso risultato:

$$P(3 \text{ di coppe}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{720}{59280} = \frac{3}{247} \approx 0,0121$$

b) I tre assi di bastoni, spade e denari nella mano di Lorenzo

Il numero di mani possibili di 10 carte su 40 è $\binom{40}{10}$. Le mani **favorevoli** sono quelle che contengono i 3 assi indicati e altre 7 carte scelte tra le restanti 37:

$$\text{Casi favorevoli} = \binom{37}{7}$$

Quindi:

$$P(3 \text{ assi indicati}) = \frac{\binom{37}{7}}{\binom{40}{10}}$$

Osservazione: il risultato coincide esattamente con quello del punto a):

$$P(3 \text{ assi indicati}) = \frac{\binom{37}{7}}{\binom{40}{10}} = \frac{3}{247} = P(a)$$

$$P(a) = P(b) = \frac{3}{247} \approx 0,0121$$



Quesito 8

A un torneo internazionale di pallavolo partecipano 16 squadre, che devono essere suddivise in 4 gironi (indicati con le lettere A, B, C, D) di 4 squadre ciascuno.

Le 16 squadre partecipanti sono inizialmente ripartite in 3 fasce, in base all'attuale ranking: 4 squadre di 1^a fascia, 4 di 2^a fascia e 8 squadre di 3^a fascia. Le 4 squadre di 1^a fascia vengono inserite, rispettivamente, nei gironi A, B, C, D, secondo l'ordine di ranking (senza alcun sorteggio). Le altre squadre di ogni girone vengono invece sorteggiate, in modo che in ciascuno di essi vi siano una squadra di 2^a fascia e due squadre di 3^a fascia.

Quante sono, complessivamente, le possibili composizioni dei gironi A, B, C, D?

Soluzione

Le 4 squadre di 1^a fascia sono già assegnate ai gironi A, B, C, D secondo il ranking, senza sorteggio: questa parte non introduce scelte. Restano da distribuire, per sorteggio, le 4 squadre di 2^a fascia (una per girone) e le 8 squadre di 3^a fascia (due per girone).

Procediamo girone per girone: per ciascuno, scegliamo 1 squadra di 2^a fascia tra quelle ancora disponibili e 2 squadre di 3^a fascia tra quelle ancora disponibili.

Girone A: 1 squadra di 2^a fascia su 4 disponibili, e 2 di 3^a fascia su 8 disponibili:

$$4 \cdot \binom{8}{2} = 4 \cdot 28 = 112$$

Girone B: restano 3 squadre di 2^a fascia e 6 di 3^a fascia:

$$3 \cdot \binom{6}{2} = 3 \cdot 15 = 45$$

Girone C: restano 2 squadre di 2^a fascia e 4 di 3^a fascia:

$$2 \cdot \binom{4}{2} = 2 \cdot 6 = 12$$

Girone D: restano 1 squadra di 2^a fascia e 2 di 3^a fascia (assegnazione obbligata):

$$1 \cdot \binom{2}{2} = 1 \cdot 1 = 1$$

Il numero totale di composizioni si ottiene moltiplicando i risultati dei quattro gironi (regola del prodotto):

$$112 \cdot 45 \cdot 12 \cdot 1 = 60\,480$$

60 480 possibili composizioni

«La matematica è il gioco più bello del mondo. Assorbe più degli scacchi, scommette più del poker, e dura più di Monopoli. È gratuita, e può essere giocata ovunque. Archimede lo ha fatto in una vasca da bagno.»

Richard J. Trudeau, *Dots and lines*, Kent State University Press, 1976

Giuseppe Scoleri