



**Ministero dell'Istruzione**  
**America Latina**  
**NUOVO ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico**  
**Sessione ORDINARIA 2001**  
**SECONDA PROVA SCRITTA**  
**Tema di MATEMATICA**

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:*

**PROBLEMA 1.**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola  $p$  di equazione:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$$

Determinare le equazioni della retta  $t$  tangente alla parabola nel suo punto  $C$  di ascissa 0 e la retta  $s$  perpendicolare alla retta  $t$  e tangente alla parabola medesima.

Dopo aver controllato che la retta  $s$  e la parabola si toccano nel punto  $A(2, 1)$ , trovare le equazioni delle circonferenze tangenti alla parabola nel punto  $A$  e tangenti alla retta  $t$ .

Indicata con  $k$  la circonferenza, tra quelle trovate, che non ha altri punti in comune con  $p$ , oltre ad  $A$ , e detto  $B$  il punto in cui questa circonferenza tocca la retta  $t$ , calcolare l'area della porzione finita di piano delimitata dal segmento  $BC$ , dal minore degli archi  $AB$  della circonferenza  $k$  e dall'arco  $AC$  della parabola  $p$ .

Chiamata  $r$  la retta tangente alla circonferenza  $k$  e strettamente parallela alla retta  $t$  e considerato il segmento parabolico che tale retta  $r$  individua sulla parabola  $p$ , calcolare il volume del solido da esso generato quando ruota di un giro completo attorno all'asse  $x$ .

**PROBLEMA 2.**

Una piramide di vertice  $V$  ha per base il triangolo  $ABC$  rettangolo in  $B$ . Lo spigolo  $VA$  è perpendicolare al piano della base e il piano della faccia  $VBC$  forma con lo stesso piano di

base un angolo di  $60^\circ$ . Inoltre lo spigolo  $BC$  è lungo  $\frac{5}{2}a$ , dove  $a$  è una lunghezza data, e il volume della piramide è uguale a

$$\frac{5}{\sqrt{3}}a^3.$$

Calcolare la lunghezza dello spigolo  $VA$ .

Controllato che essa è  $2a\sqrt{3}$ , calcolare la distanza del vertice  $B$  dal piano della faccia  $VAC$ .

Determinare il prisma retto, avente il volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base  $ABC$  della piramide.

Stabilire se tale prisma ha anche la massima area totale.

**QUESTIONARIO**

$S_n$  rappresenta la somma di  $n$  numeri in progressione geometrica di ragione  $\frac{3}{7}$  e primo termine  $\frac{7}{3}$ . Calcolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

Di due rette  $a, b$  dello spazio ordinario si sa soltanto che sono perpendicolari ad una stessa retta  $c$ . elencare tutte le possibili posizioni reciproche delle rette  $a, b$ .

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali, le due rette  $a, b$  hanno coefficienti angolari rispettivamente  $-1$  e  $\frac{1}{2}$ . Calcolare il coseno dell'angolo orientato  $(a, b)$ ,

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$2xy - (k-1)x + 4y - 2k + 1 = 0,$$

dove  $k$  è un parametro reale.

Determinare per quali valori di  $k$  il luogo assegnato è un'iperbole;  
una coppia di rette.

Determinare una primitiva della funzione  $\frac{\ln x}{x}$ , essendo  $\ln x$  il logaritmo naturale di  $x$ .

Considerata la funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , dimostrare la formula che fornisce la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $\frac{1}{f(x)}$  facendo ricorso alla definizione di derivata.

Calcolare la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x)$  tale che:

$$f(x) = \int_0^x t e^{t} dt, \text{ con } x > 0,$$

dove  $e$  è il numero di Nepero,

- Durata massima della prova: 6 ore,
- Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema,
- È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.