ORDINAMENTO 2001 - SESSIONE SUPPLETIVA – QUESTIONARIO

QUESITO 1

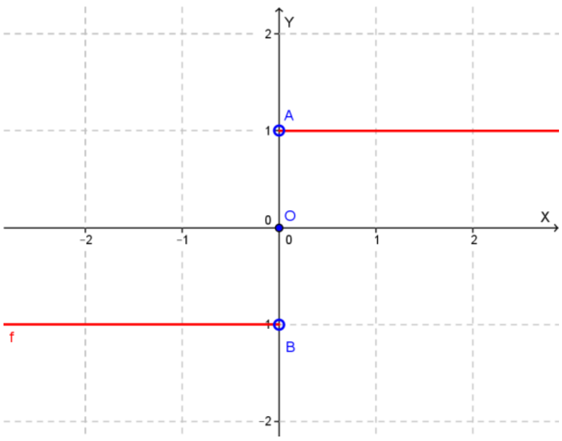
Considerata una funzione reale di variabile reale f (x), si prendano in esame le due seguenti proposizioni:
A: condizione necessaria e sufficiente affinché f (x) sia definita in un punto a è che sia continua in a.
B: condizione necessaria e sufficiente affinché f (x) sia continua in un punto a è che sia derivabile in a.
Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta.

a) A vera – B vera b) A vera – B falsa c) A falsa – B vera d) A falsa – B falsa

La proposizione A è falsa: infatti mentre è necessario essere definita in un punto per essere continua non è sufficiente. Esempio:

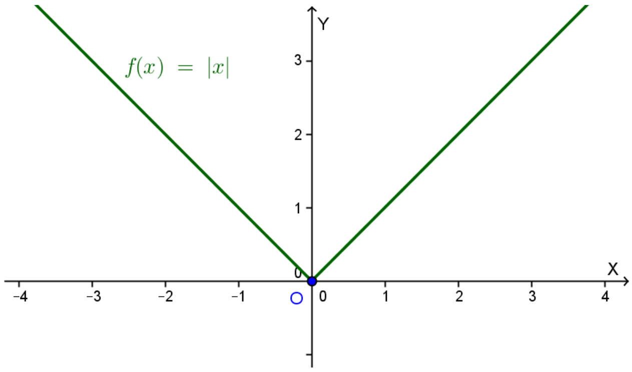
$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$$

Questa funzione è definita su tutto R ma non è continua in x=0.



La proposizione B è falsa: infatti è sufficiente essere derivabile per essere continua (esiste un apposito teorema) ma non è necessario essere derivabile per essere continua.

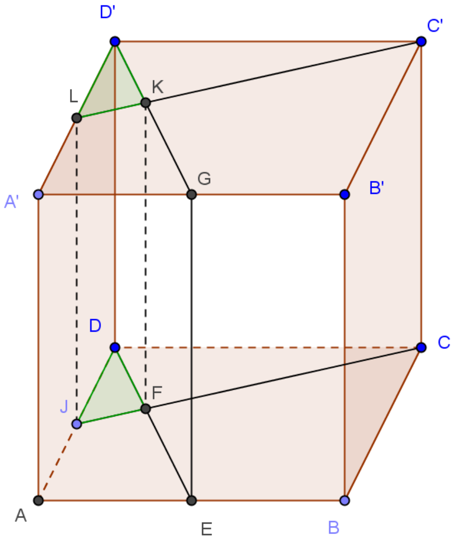
Esempio: $f(x) = |x|$ è continua in x=0 ma non è derivabile (in x=0 abbiamo un punto angoloso).

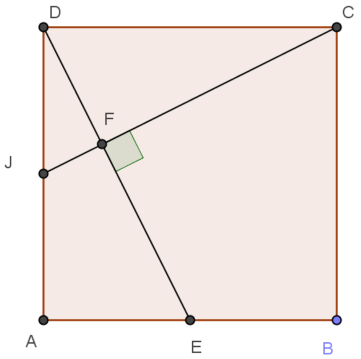


La risposta esatta è la d: A falsa e B falsa.

QUESITO 2

Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A'B'C'D'. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani D'DE e C'CF dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.





Indicato con $2s$ lo spigolo del cubo risulta:

$$AE = s, \quad DE = \sqrt{4s^2 + s^2} = s\sqrt{5} = AE \cdot \sqrt{5}$$

Dalla congruenza fra i triangoli ADE e CDJ risulta $DJ = AE = s$.
Dalla similitudine fra i triangoli ADE ed FDJ segue che: $DJ = FJ \cdot \sqrt{5} \implies FJ = \frac{s}{\sqrt{5}}$ ed anche: $DF = 2FJ = \frac{2s}{\sqrt{5}}$. Il triangolo DFJ ha quindi area: $Area(DFJ) = \frac{1}{2} DF \cdot FJ = \frac{1}{5} s^2$
Inoltre: $Area(ADE) = \frac{1}{2} AE \cdot DE = s^2$. Si ha poi: $Area(AEFJ) = s^2 - \frac{1}{5} s^2 = \frac{4}{5} s^2$

$Area(CDF) = \ Area(AEFJ)$ perché differenza fra le aree uguali di ADE e CDJ con FDJ.

Le quattro parti in cui il cubo è diviso dai due piani D'DE e C'CF sono dei prismi retti di altezza uguale allo spigolo del cubo e basi rispettivamente DFJ, AEFJ, CDF e BCFE.

$$V(prisma\ con\ base\ DJF) = Area(DJF) \cdot 2s = \frac{2}{5}s^3$$
$$V(prisma\ con\ base\ AEFJ) = \ Area(AEFJ) \cdot 2s = \frac{8}{5}s^3$$

Essendo $Area(CDF) = \ Area(AEFJ)$ il prisma di base CDF ha lo stesso volume del prisma di base AEFJ.

$$V(pr.\ con\ base\ BCFE) = V(cubo) - \ V(pr.\ con\ base\ DJF) - 2V(pr.\ con\ base\ AEFJ) =$$

$$= (2s)^3 - \frac{2}{5}s^3 - \frac{16}{5}s^3 = \frac{22}{5}s^3$$

Il rapporto del volume dei quattro prismi rispetto al volume del cubo è:

$$\frac{V(prisma\ con\ base\ DJF)}{V(cubo)} = \frac{\frac{2}{5}s^3}{8s^3} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{V(prisma\ con\ base\ AEFJ)}{V(cubo)} = \frac{\frac{8}{5}s^2}{8s^3} = \frac{1}{5} = \frac{V(prisma\ con\ base\ CDF)}{V(cubo)}$$

$$\frac{V(prisma\ con\ base\ BCFE)}{V(cubo)} = \frac{\frac{22}{5}s^3}{8s^3} = \frac{11}{20}$$

QUESITO 3

Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1048576$$

Risulta: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$. Infatti $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ può essere visto come lo sviluppo della potenza del binomio $(a+b)^n \ \ con\ \ a = 1\ \ e\ \ b = 1$:

$$(a+b)^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Dobbiamo quindi quindi vedere se esiste un numero naturale n per cui :

$2^n = 1048576 = 2^{20}$, quindi n=20.

QUESITO 4

Sia f (x) una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che: $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}$$

Osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Inoltre il numeratore ed il denominatore sono funzioni continue e derivabili in un intorno di x=0 ed inoltre esiste un intorno di x=0 (privato del punto stesso) in cui la derivata del denominatore, che è –2sen(2x), non si annulla mai. Possiamo quindi applicare la regola di de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{D\left(\int_0^x f(t)dt - x\right)}{D(\cos 2x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{-2sen(2x)}$$

Il limite si presenta ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e sono ancora soddisfatte le ipotesi del teorema di de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{D(f(x) - 1)}{D(-2sen(2x))} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{-4\cos(2x)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}$$

QUESITO 5

Dimostrare che la derivata, rispetto a x, della funzione a^x, dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \ln a$.

Si può applicare la definizione di derivata (come indicato in tutti i libri di testo) oppure, se è noto che

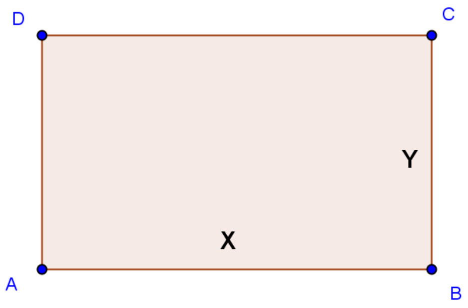
$$D\left(e^{f(x)}\right) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

Più velocemente ne seguente modo:

$$D(a^x) = D\left(e^{ln(a^x)}\right) = D\left(e^{x \cdot ln(a)}\right) = \ln(a) \cdot \left(e^{x \cdot ln(a)}\right) = a^x \cdot \ln(a)$$

QUESITO 6

Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.



Posto AB = x e BC = y

$(x \geq 0, y \geq 0)$

AB+BC =p = costante

Area = S = x y

Per via elementare: sappiamo *che il prodotto di due grandezze a somma costante è massimo quando le due grandezze sono uguali*, quindi S è massima quando x=y, cioè nel caso del quadrato.

Questa proprietà può essere dimostrata a partire dalla seguente identità:

$(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2-(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2=4\mathrm{xy}$

da cui è facile capire che, se x+y è costante, il massimo di 4xy (quindi di xy), si ha quando $(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2=0$, cioè se x=y.

ALTRO MODO

$x+y=p \quad con \quad 0 \leq x \leq p$

$y=p-x \quad con \quad 0 \leq y \leq p$

$S=x \cdot y=x(p-x)=-x^2+px$

che rappresenta una parabola con la concavità verso il basso, il cui massimo si ha in corrispondenza del vertice:

$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{2}}$ (che soddisfa le condizioni della x), $\boldsymbol{y}=p-x=p-\frac{p}{2}=\frac{\boldsymbol{p}}{\mathbf{2}}$ da cui x=y , quindi il rettangolo di area massima è il quadrato.

N.B. Il problema potrebbe essere risolto anche mediante le derivate studiando il segno della derivata di S: $S'=-2x+p>0 \quad se\ x<\frac{p}{2}$, quindi S è crescente se $x<\frac{p}{2}$ e decrescente se $x>\frac{p}{2}$, quindi in $x=\frac{p}{2}$ c'è il massimo assoluto di S.

QUESITO 7

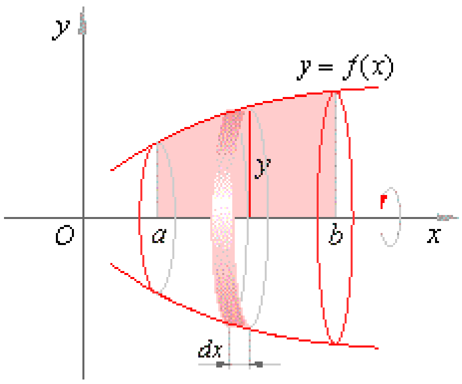
Una primitiva della funzione $f(x)$ è x^2+2x. Se è possibile calcolare $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

Operiamo la sostituzione $\frac{x}{2}=t\,,\ \ da\ cui\ \ x=2t\,,\quad dx=2dt$ e notiamo che quando x=0 risulta t=0 e quando x=1, t=1/2. Si ha pertanto:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)2dt=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt=2\cdot[t^2+2t]_0^{\frac{1}{2}}=2\cdot\left(\frac{1}{4}+1-0\right)=\frac{5}{2}$$

QUESITO 8

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base [a; b] relativo alla funzione f (x), continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.



Consideriamo il volume infinitesimo dV come cilindro con raggio di base f(x) e altezza dx:

$dV=\pi r^2 h=\pi f^2(x)dx$

Il volume richiesto può essere visto come somma di questi infiniti volumetti, quindi:

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx=V$$

QUESITO 9

Calcolare la derivata della funzione $sen\,2x$ rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.

Ricordiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

Nel nostro caso (utilizzando le formule di prostaferesi):

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen2(x+h)-sen2x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(2x+2h)-sen2x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2sen\frac{2x+2h-2x}{2}cos\frac{2x+2h+2x}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2sen(h)cos(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[2\cdot\frac{sen\,h}{h}\cdot cos(2x+h)\right]=2\cdot 1\cdot cos(2x)=2cos(2x)$$

Quindi:

$D[sen(2x)]=2\cos(2x)$

QUESITO 10

Considerata una funzione reale di variabile reale f (x), derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinché la funzione f (x) abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a)=0$ è:

A) necessaria e sufficiente. B) necessaria ma non sufficiente. C) sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

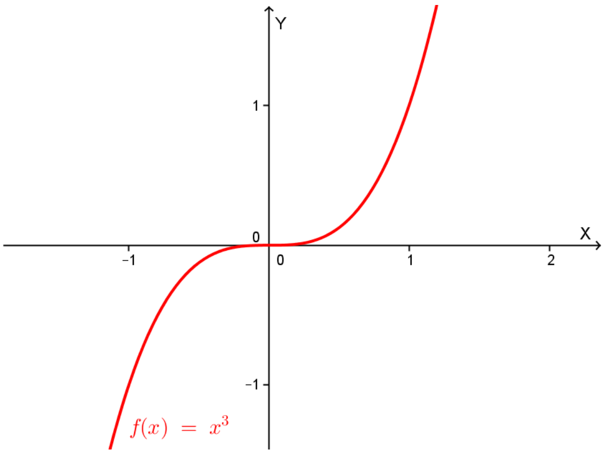
La condizione è SOLO necessaria (ma non sufficiente): risposta A).

Infatti, secondo un noto teorema, se $f''(a)=0$ e la prima derivata che non si annulla è di ordine dispari, allora abbiamo in x=a un flesso. Esempi:

$f(x)=x^3$; $f''(x)=6x=0$ $se\ x=0$ $ed\ in\ x=0\ abbiamo\ un\ flesso$, infatti risulta:

$f''(x) < 0 \;\; se \; x < 0 \;\; (concavità \; verso \; il \; basso)$

$f''(x) > 0 \;\; se \; x > 0 \;\; (concavità \; verso \; l'alto)$.

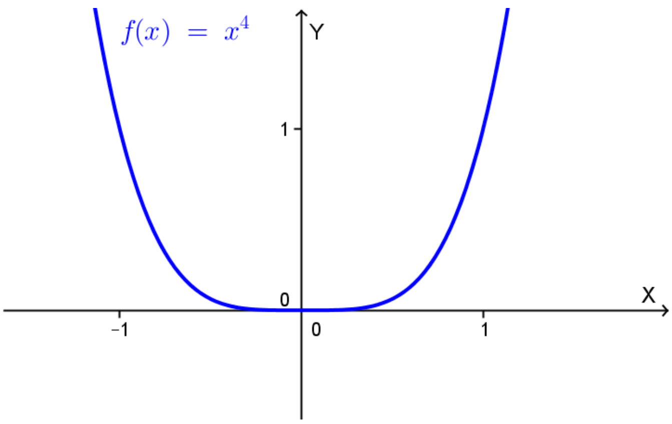


$f(x) = x^4$; $\;\; f''(x) = 12x^2 = 0 \;\; se \; x = 0 \;\; ed \; in \; x = 0 \; NON \; abbiamo \; un \; flesso$, infatti

risulta:

$f''(x) > 0 \;\; se \; x \neq 0 \; (concavità \; verso \; l'alto \; sia \; destra \; di \; x = a \; che \; a \; sinistra)$

In particolare in questo caso in x=0 c’è un minimo.



Con la collaborazione di Angela Santamaria