PNI 2001 - SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Le misure a, b, c dei lati di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione k.

a)

Si esprima, in funzione di k, il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo.

Indicando con a la misura del lato minore risulta: b=a+k, c=a+2k.
Il perimetro del triangolo è quindi: 2p=3a+3k.
Il raggio r della circonferenza inscritta è dato da:

$$r=\frac{Area(ABC)}{p}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{3a+3k}{2}\left(\frac{3a+3k}{2}-a\right)\left(\frac{3a+3k}{2}-a-k\right)\left(\frac{3a+3k}{2}-a-2k\right)}}{\frac{3a+3k}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{3a+3k}{2}\left(\frac{a+3k}{2}\right)\left(\frac{a+k}{2}\right)\left(\frac{a-k}{2}\right)}}{\frac{3a+3k}{2}}=\frac{1}{2(3a+3k)}\sqrt{3(a+k)^2(a+3k)(a-k)}=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{3(a+3k)(a-k)}=\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-3k^2+2ak+a^2}=r(k)$$

b)

Si stabilisca il valore di k per il quale r è massimo.

$r(k)=\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-3k^2+2ak+a^2}$ è massimo se lo è $-3k^2+2ak+a^2$; e potendo vedere

$y=-3k^2+2ak+a^2$ come l'equazione di una parabola, il massimo si ha ne vertice, quindi se:

$$k = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2a}{6} = \frac{a}{3}$$

Il raggio della circonferenza inscritta è massimo quando $k = \frac{a}{3}$.

c)

Si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani, ortogonali e monometrici, e, per il valore di k determinato in b), si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, ad ABC.

Per il valore di k=a/3 trovato nel punto precedente i lati del triangolo misurano:

BC=a , AC=b=a+k=a+a/3=(4/3)a , AB=c=a+2k=a+(2/3)a=(5/3)a ,

$$r(k) = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-3k^2+2ak+a^2} = r\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-3k^2+2ak+a^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-\frac{a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}+a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{4a^2}{3}} = \boldsymbol{\frac{a}{3} = r}.$$

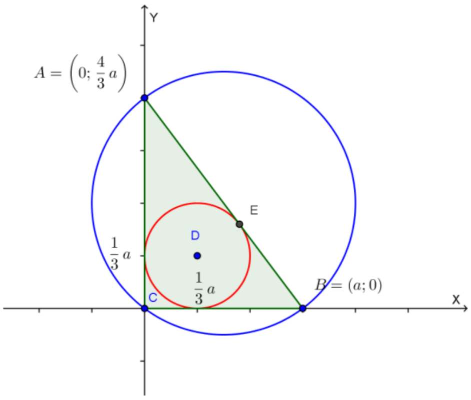
Osserviamo che:

$$BC^2 + AC^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{25}{9}a^2 = AB^2$$

Quindi il triangolo ABC è rettangolo in C.

Un conveniente sistema di riferimento può essere quello che ha l'origine nel vertice C dell'angolo retto del triangolo, l'asse x coincidente, per esempio, con la retta del lato CB e l'asse y, di conseguenza, coincidente con la retta del lato CA.

Abbiamo la seguente rappresentazione grafica:



Le coordinate dei vertici del triangolo sono:

$$C = (0;0), \quad A = \left(0; \frac{4}{3}a\right), \qquad B = (a;0)$$

Il raggio della circonferenza inscritta è: $r = \frac{1}{3}a$; il suo centro è $D = \left(\frac{1}{3}a; \frac{1}{3}a\right)$.

Il raggio della circonferenza circoscritta è uguale alla metà dell'ipotenusa AB (che è un diametro): $R = \frac{5}{6}a$. Il centro di tale circonferenza è il punto medio E dell'ipotenusa AB (diametro):

$$x_M(AB) = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}\ ; \quad y_M(AB) = \frac{0+\frac{4}{3}a}{2} = \frac{2}{3}a\ , \quad quindi:\ E = \left(\frac{a}{2}; \frac{2}{3}a\right)$$

Le equazioni delle circonferenze richieste sono quindi:

circonferenza inscritta: $\left(x-\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{1}{9}a^2\ ,\ \ x^2+y^2-\frac{2}{3}ax-\frac{2}{3}ay+\frac{1}{9}a^2 = 0$

circonferenza circoscritta: $\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(y-\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{25}{36}a^2\ ,\ \ x^2+y^2-ax-\frac{4}{3}ay = 0$

d)

Si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

Le due sfere hanno quindi lo stesso raggio delle circonferenze. Indicando V(r) e V(R) i volumi delle sfere con raggio rispettivamente $r = \frac{1}{3}a$ e $R = \frac{5}{6}a$ risulta:

$$\frac{V(r)}{V(R)} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{\frac{1}{27}a^3}{\frac{125}{216}a^3} = \frac{1}{27}\cdot\frac{216}{125} = \frac{8}{125}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria