

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

**Tema di: MATEMATICA**

1. In un piano  $\alpha$  è assegnata una parabola avente il fuoco e il vertice nei punti rispettivamente F e V tali che  $\overline{VF} = \frac{1}{2}$ . Riferito il piano  $\alpha$  ad un conveniente sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy:
- Determinare l'equazione della parabola.
  - Condotta per F una retta di coefficiente angolare m, indicati con A e B i punti in cui tale retta seci la parabola e condotte quindi le rette tangenti alla parabola stessa in questi punti, esprimere in funzione di m le coordinate del punto P in cui si secano tali tangenti.
  - Verificare che il punto P appartiene alla direttrice della parabola.
  - Chiamate  $A', B', P'$  le posizioni dei punti  $A, B, P$  corrispondenti al particolare valore  $m = \frac{1}{2}$ , trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti  $A', B', P'$ .
  - Calcolare le aree delle regioni in cui la parabola divide il cerchio delimitato dalla circonferenza trovata.
2. a) Studiare la funzione  $y = \frac{1}{\cos x} - \cos x$ , con  $-\pi \leq x \leq \pi$  e disegnarne l'andamento.  
b) Dopo aver dimostrato che
- $$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \text{ dove } t = \tan \frac{x}{2}$$
- esprimere in funzione di t l'espressione:  $\frac{1}{\cos x} - \cos x$ .
- Studiare la funzione di t così trovata e disegnarne l'andamento.
  - A completamento del problema dimostrare che: condizione sufficiente ma non necessaria affinché una funzione  $f(x)$ , derivabile almeno due volte in un punto  $a$ , abbia ivi un minimo relativo è che risulti  $f'(a) = 0$  e  $f''(a) > 0$ .
3. a) Fornire la definizione di piramide retta.  
b) Tra le piramidi rette triangolari, aventi la stessa altezza e uguale perimetro di base, determinare quella che ha il volume massimo.  
c) Tale piramide ha anche la massima area laterale?  
d) Posto che la piramide triangolare retta considerata abbia altezza  $h$ , perimetro di base  $\frac{3}{2}h\sqrt{3}$  e volume massimo, calcolare il volume e l'area laterale della piramide.