LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2000 - PROBLEMA 1

È assegnata, nel piano riferito ad assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva g di equazione

$$y = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

a)

Il candidato studi e disegni il grafico di g e quello della curva g_1 simmetrica di g rispetto alla retta y = 1.

$$\boldsymbol{y = g(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}}$$

Dominio: tutto R.

Intersezioni con gli assi cartesiani: se x=0, y=0: il grafico passa per $O = (0; 0)$. Se y=0, x=0. Quindi gli assi cartesiani vengono tagliati solo nell'origine.

Simmetrie notevoli: $g(-x) = g(x)$: la funzione è pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Segno della funzione: $y \geq 0$ *per ogni* x (*in particolare si annulla per* $x = 0$). Il grafico non è mai al di sotto dell'asse x.

Limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti:

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$: la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Non ci sono asintoti verticali né obliqui.

Studio della derivata prima:

$g'(x) = \frac{2x(1+x^2)-x^2(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \geq 0 \;\; se \;\; x \geq 0$: la funzione è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$; $x = 0$ è punto di minimo relativo (e assoluto).

Studio della derivata seconda:

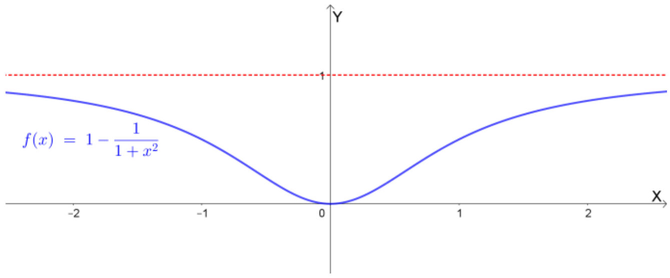
$$g''(x) = \frac{2(1+x^2)^2 - 2x[2(1+x^2)(2x)]}{(1+x^2)^4} = \cdots = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3} \geq 0 \;\; per \;\; 2-6x^2 \geq 0,$$

$x^2 \leq \frac{1}{3}, \;\; -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Quindi:

il grafico di g ha la concavità verso l'alto per $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ e verso il basso per $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\ vel\ x > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Punti di flesso $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, con ordinata: $y = g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \cdots = \frac{1}{4}$, perciò:

$F_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{4}\right)$, $\quad F_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{4}\right)$

Grafico della funzione:



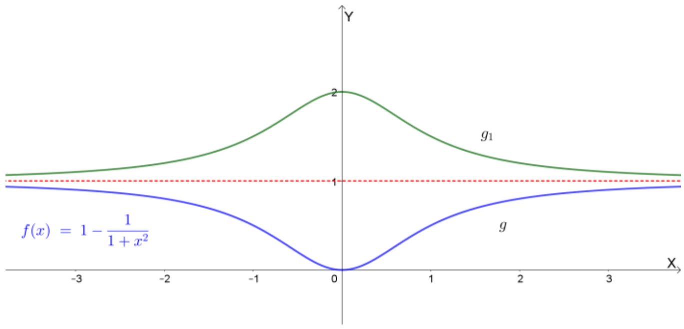
La simmetria rispetto alla retta di equazione $y = 1$ ha equazioni:

$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - y \end{cases}$; $\begin{cases} x = x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$; $\begin{cases} x \to x \\ y \to 2 - y \end{cases}$

L a simmetrica g_1 ha quindi equazione:

$2 - y = \frac{x^2}{1+x^2}$, $\quad y = 2 - \frac{x^2}{1+x^2}$; $\quad y = \boldsymbol{g_1(x) = \frac{2+x^2}{1+x^2}}$.

Grafico di g_1:

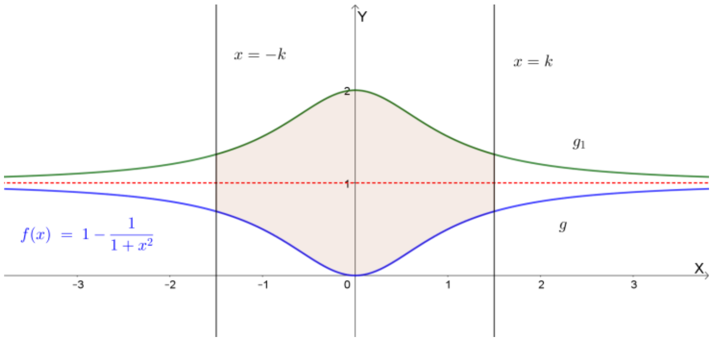


b)

Il candidato determini k (k > 0) in modo tale che la regione limitata da g e g_1 e dalle rette $x = \pm k$ sia equivalente al cerchio di raggio unitario.

Il cerchio di raggio unitario ha area: π.

L'area S della regione delimitata da g e g_1 e dalle rette $x = \pm k$ si ottiene calcolando il seguente integrale (si noti la simmetria della regione rispetto all'asse y):



$$S = 2\int_0^k [g_1(x) - g(x)]\,dx = 2\int_0^k \left[\frac{2+x^2}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}\right] dx = 2\int_0^k \left[\frac{2}{1+x^2}\right] dx =$$

$$= 2\,[2\,arctg(x)]_0^k = 4\,arctg(k)$$

Deve essere $4\,arctg(k) = \pi$, $arctg(k) = \frac{\pi}{4}$: $quindi\ k = 1.$

c)

Il candidato dica in che cosa consista il problema della "quadratura del cerchio" e perché venga definito un "problema classico".

Il problema della *quadratura del cerchio* consiste nella costruzione per via elementare di un quadrato di area pari a quella del cerchio dato. Si tratta di un problema classico, che si è dimostrato essere irrisolvibile per via elementare. Ciò equivale a dire che non è possibile costruire, usando solo riga e compasso, il lato del quadrato equivalente al cerchio. Se per esempio prendiamo il cerchio di raggio 1, la sua area è uguale a π , quindi il lato del quadrato equivalente è π , che non può essere costruito per via elementare. La dimostrazione dell'impossibilità di quadrare il cerchio (per via elementare) è una conseguenza del fatto che π è un numero trascendente.

La quadratura del cerchio, assieme al problema della trisezione dell'angolo e a quello della duplicazione del cubo, è un problema classico della matematica greca (più precisamente della geometria).

Con la collaborazione di Angela Santamaria