LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2000 - PROBLEMA 3

Della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ si hanno le seguenti informazioni, tutte localizzate nel punto $x = 0$: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$.

a)

Determinata la parabola, si scrivano le equazioni delle tangenti ad essa condotte per il punto P dell'asse y di modo che valga 60° l'angolo $A\hat{P}B$, essendo A e B i rispettivi punti di tangenza.

La parabola ha equazione del tipo $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.
$f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$. Imponiamo le condizioni fornite:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} f(0) = c = 1 \\ f'(0) = b = 0 \\ f''(0) = 2a = 2 \end{cases} ; \begin{cases} c = 1 \\ b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

La parabola richiesta ha quindi equazione: $y = f(x) = x^2 + 1$

Il generico punto P dell'asse y ha coordinate del tipo $P = (0; t)$, con $t < 1$.
La generica retta uscente da P ha equazione: $y - t = mx$, $y = mx + t$.
Imponiamo che questa retta sia tangente alla parabola:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = mx + t \end{cases} ; \quad x^2 + 1 = mx + t\,, \quad x^2 - mx + 1 - t = 0\,, \qquad \Delta = m^2 - 4 + 4t = 0,$$

$m^2 = 4 - 4t$, $m = \pm\sqrt{4 - 4t}$ (ricordiamo che $t < 1$, $quindi\ 4 - 4t > 0$).

Detto $\alpha = 60°$ l'angolo fra le tangenti (che è acuto, quindi $tg\ \alpha > 0$), dovrà essere:

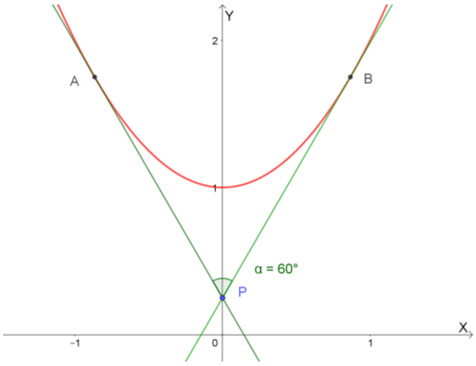
$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\sqrt{4-4t} - (-\sqrt{4-4t})}{1 - \left(\sqrt{4-4t}\right)^2}\right| = \left|\frac{2\sqrt{4-4t}}{4t-3}\right| = tg\ 60° = \sqrt{3}, \text{ quindi:}$$

$2\sqrt{4 - 4t} = \sqrt{3}\,|4t - 3|$; $4(4 - 4t) = 3(4t - 3)^2$; $16 - 16t = 3(16t^2 - 24t + 9)$;

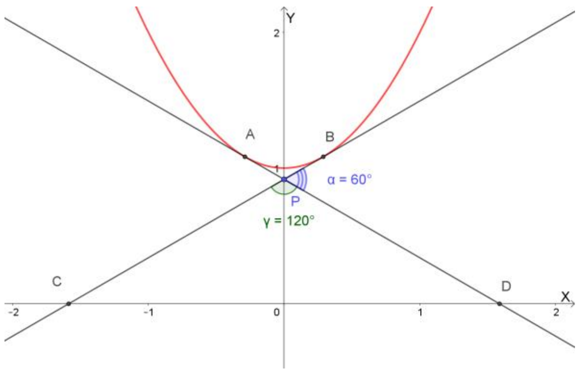
$48t^2 - 56t + 11 = 0$;

$$t_1 = \frac{1}{4}\ , \qquad t_2 = \frac{11}{12}\ (entrambi\ questi\ valori\ sono\ accettabili)$$

Per $t_1 = \frac{1}{4}$ si ha $m = \pm\sqrt{4-4t} = \pm\sqrt{3}$, quindi le tangenti da P alla parabola hanno equazioni: $y = \pm\sqrt{3}\,x + \frac{1}{4}$.



Per $t_2 = \frac{11}{12}$ si ha $m = \pm\sqrt{4-4t} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, quindi le tangenti da P alla parabola hanno equazioni: $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,x + \frac{11}{12}$. Tale soluzione si scarta perché “uno degli angoli” fra le rette è ancora 60°, ma l’angolo APB è 120°: si osservi la figura:



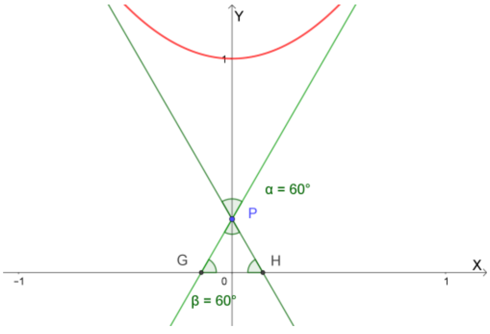
Concludendo:

Il punto P ha quindi coordinate: $P = \left(0; \frac{1}{4}\right)$; le tangenti hanno equazioni: $y = \pm\sqrt{3}\,x + \frac{1}{4}$

Osservazione

Le due tangenti richieste ed il punto P possono essere trovate in modo più rapido con considerazioni geometriche.

Osserviamo la figura seguente:



Possiamo notare che l'angolo GPH misura 60°, quindi il triangolo GPH è equilatero (essendo isoscele per la simmetria rispetto all'asse y delle tangenti), pertanto il coefficiente angolare della tangente PB è $m = tg\ 60° = \sqrt{3}$. La tangente PB è quindi una retta del tipo $y = \sqrt{3}\,x + t$; risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = \sqrt{3}x + t \end{cases};\ x^2 + 1 = \sqrt{3}x + t\,; x^2 - \sqrt{3}x + 1 - t = 0\,; \Delta = 3 - 4 + 4t = 0:\ t = \frac{1}{4}.$$

La tangente PB ha quindi equazione: $y = \sqrt{3}\,x + \frac{1}{4}$ e la tangente PA, simmetrica di PB rispetto all'asse y, ha equazione: $y = -\sqrt{3}\,x + \frac{1}{4}$. Il punto P ha coordinate: $P = \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

b)

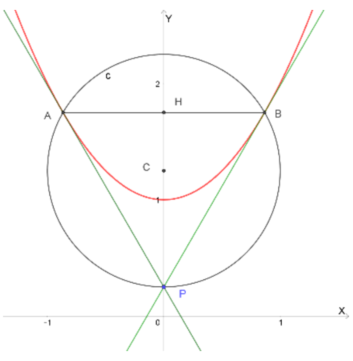
Accertato che il punto P ha ordinata $\frac{1}{4}$, *si scriva l'equazione della circonferenza passante per A, B e P.*

Abbiamo già verificato che il punto P ha coordinate: $P = \left(0; \frac{1}{4}\right)$.
La circonferenza per A, P e B si può trovare come circonferenza per tre punti oppure più semplicemente nel modo seguente:
il triangolo APB è equilatero (con considerazioni analoghe a quelle fatte nel punto precedente per il triangolo GPH), quindi la circonferenza richiesta è circoscritta ad un triangolo equilatero di lato PB. P è noto, cerchiamo B, che è l'intersezione fra la parabola e la tangente in B:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = \sqrt{3}x + \frac{1}{4} \end{cases};\ x^2 + 1 = \sqrt{3}x + \frac{1}{4}\,; x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = 0\,; \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0, quindi\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sostituendo per esempio nell'equazione della retta si ha: $y = \frac{7}{4}$. Quindi: $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{7}{4}\right)$
Calcoliamo la distanza PB, con $P = \left(0; \frac{1}{4}\right)$ $e\ B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{7}{4}\right)$:

$$\overline{PB} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}\ .$$



Per note proprietà della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero, detto l il lato del triangolo ed R il raggio della circonferenza, si ha:
$l = R\sqrt{3}\ \ e\ \ PH = \frac{3}{2}R$. Quindi: $\sqrt{3} = R\sqrt{3}, R = 1.$
$PH = \frac{3}{2}R = \frac{3}{2}$. Pertanto, detto C il centro della circonferenza, risulta: $PC = R = 1 = y_C - y_P = y_C - \frac{1}{4}$, Perciò:
$y_C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$: $C = \left(0; \frac{5}{4}\right)$.

La circonferenza per A, B e P ha perciò equazione:

$$(x-0)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=1;\quad x^2+y^2-\frac{5}{2}y+\frac{9}{16}=0.$$

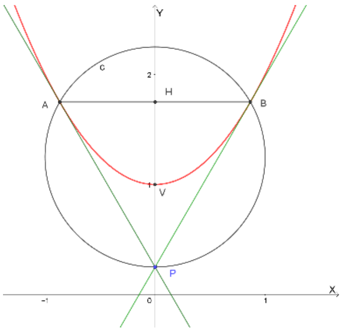
Allo stesso risultato si perviene imponendo alla generica circonferenza di equazione:

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

il passaggio per i punti: P $=\left(0;\frac{1}{4}\right)$, $B=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{7}{4}\right)$, $A=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{7}{4}\right)$.

c)

Si calcolino le aree delle due parti in cui la circonferenza risulta divisa dall'arco di parabola di estremi A e B.



Ricordiamo che: $V=(0;1), H=(0;y_B)=\left(0;\frac{7}{4}\right)$;

$\overline{AB}=2\,x_B=\sqrt{3}$; $\overline{VH}=y_H-y_V=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$.

Il segmento parabolico di base AB e altezza VH vale: $\frac{2}{3}\overline{AB}\cdot\overline{VH}=\frac{2}{3}(\sqrt{3})\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Osserviamo che l'area del cerchio meno l'area del triangolo APB ci dà tre segmenti circolari uguali di basi AB,PB e AP.

$$Area(tr.\ APB)=\frac{1}{2}AB\cdot PH=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}R=\frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

$$Area(segmento\ circolare)=\frac{Area(cerchio)-Area(triangolo\ APB)}{3}=$$

$$=\frac{\pi-\frac{3}{4}\sqrt{3}}{3}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{4}\sqrt{3}\cong 0.61$$

L'area della regione superiore delimitata dalla circonferenza e dalla parabola è data da:

$$A_1=Area(segmento\ circolare)+Area(segmento\ parabolico)=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{4}\sqrt{3}=A_1$$

L'area della seconda parte in cui il cerchio risulta divisa dall'arco di parabola AB è data da:

$$A_2=Area(cerchio)-A_1=\pi-\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{4}\sqrt{3}=A_2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria