ORDINAMENTO 2002 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Con riferimento a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a)

scrivere l'equazione della circonferenza k con centro nel punto (8;2) e raggio 6 e calcolare le coordinate dei punti M ed N in cui la bisettrice b del 1° e 3° quadrante interseca la curva.

La circonferenza ha equazione: $(x-8)^2+(y-2)^2=36$ che diventa:

$x^2+y^2-16x-4y+32=0$

Cerchiamo le intersezioni con la bisettrice del primo e terzo quadrante:

$$\begin{cases} x^2+y^2-16x-4y+32=0 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+x^2-16x-4x+32=0\,,\ \ 2x^2-20x+32=0$$

$x^2-10x+16=0$ che ha come radici x=2 e x=8 . Quindi le intersezioni sono:

$M=(2;2)\ \ ed\ \ N=(8;8)$.

b)

Scrivere l'equazione della parabola p avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate, tangente all'asse delle ascisse in un punto del semipiano x>0 e passante per i punti M ed N.

La parabola p è del tipo: $y=ax^2+bx+c$, che, dovendo passare per M ed N deve essere:

$$\begin{cases} 2=4a+2b+c=0 \\ 8=64a+8b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=4a+2b+c=0 \\ 6=60a+6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=4a+2(1-10a)+c \\ b=1-10a \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=16a \\ b=1-10a \end{cases}$$

Quindi la parabola può essere scritta nella forma:

$y = ax^2 + (1-10a)x + 16a$; imponiamo la tangenza all'asse delle x:

$$\begin{cases} y = ax^2 + (1-10a)x + 16a \\ y = 0 \end{cases} \implies ax^2 + (1-10a)x + 16a = 0 \ , \ \Delta = 0:$$

$(1-10a)^2 - 4a(16a) = 0$, $36a^2 - 20a + 1 = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$ e $a = \dfrac{1}{18}$.

Per $a = \frac{1}{2}$ $ax^2 + (1-10a)x + 16a = 0$ diventa: $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0,\ x^2 - 8x + 16 = 0$ da cui $x = 4$.

Per $a = \frac{1}{18}$ $ax^2 + (1-10a)x + 16a = 0$ diventa: $\frac{1}{18}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9} = 0,\ x^2 + 8x + 16 = 0$ da cui $x = -4$.

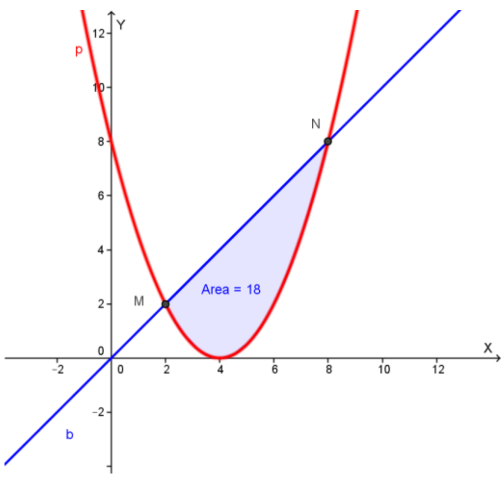
La parabola richiesta è quella tangente all'asse x in x=4, che si ottiene per $a = \frac{1}{2}$, quindi la sua equazione è:

$p\colon\ y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8.$

c)

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola p e dalla bisettrice b.

Rappresentiamo graficamente la parabola e la retta.
$b\colon\ y = x$, $\quad p\colon\ y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8.$



Le due curve si intersecano per x=2 e x=8, quindi l'area è data da:

$$Area = \int_2^8 \left[x - \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right)\right] dx = \int_2^8 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 8\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 8x\right]_2^8 =$$

$$= 18\, u^2$$

d)

Dopo aver stabilito che la circonferenza k e la parabola p non hanno altri punti in comune oltre ad M ed N, calcolare le aree delle regioni in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla parabola.

Cerchiamo le intersezioni tra la circonferenza k e la parabola p:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16x - 4y + 32 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 \end{cases} \Longrightarrow$$

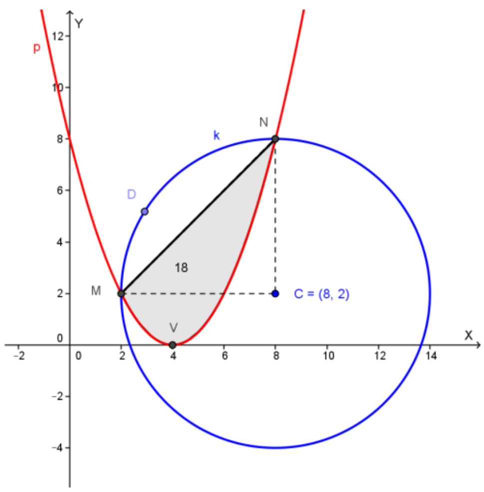
$$x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right)^2 - 16x - 4\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right) + 32 = 0$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - 4x + 8\right)^2 - x^2 = 0 \quad , \quad \left[\left(\frac{x^2}{2} - 4x + 8\right) - x\right] \cdot \left[\left(\frac{x^2}{2} - 4x + 8\right) + x\right] =$$

$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 5x + 8\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8\right) = 0$, che ha come soluzioni solo x=2, x=8 (il secondo fattore non si annulla mai).

Quindi la circonferenza e la parabola non hanno altri punti in comune oltre ad M ed N.

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano la circonferenza e la parabola:



Calcoliamo l'area del segmento circolare MND come differenza tra il settore circolare MCND (pari ad un quarto del cerchio) ed il triangolo (rettangolo) MCN.

Si ha:

$$Area(settore\ MND) = \frac{1}{4}\ Area(cerchio) - Area(triangolo\ MCN) = \frac{1}{4}(\pi \cdot 6^2) - \frac{6 \cdot 6}{2} =$$

$$= (9\pi - 18)\ u^2$$

Quindi le due parti richieste hanno le seguenti aree:

$$Area(MVND) = 18\ u^2 + (9\pi - 18)\ u^2 = 9\pi\ \ u^2 = A_1$$

$$A_2 = Area(cerchio) - A_1 = 36\ \pi^2 - 9\ \pi^2 = 27\ \pi^2\ \ u^2 = A_2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria