PNI 2002 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Considerato il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2y + a^2bz = a^2b \end{cases} \qquad [1]$$

a)

stabilire sotto quali condizioni per i parametri reali a, b esso è:
determinato, indeterminato, impossibile.

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti A (secondo il teorema di Laplace applicato alla prima riga):

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2b \end{vmatrix} = a(a^3b - a^3b) - a(a^2b - ab^2) + a^2(a^2 - ab) =$$

$$= a^4 + a^2b^2 - 2ba^3 = a^2(a^2 + b^2 - 2ab) = a^2(a-b)^2$$

Se $\det A \neq 0$, per il teorema di Cramer il sistema è determinato.
Se $\det A = 0$ $(a = 0 \; oppure \; a = b)$ il sistema è impossibile o indeterminato. Dobbiamo analizzare il rango della matrice dei coefficienti A e quello della matrice orlata B (ottenuta aggiungendo ad A la colonna dei termini noti).

Se a=0:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango di A è chiaramente 1 per ogni valore di b; il rango di B è invece 2 per ogni valore di b: il minore ottenuto con prima e quarta colonna e le prime due righe vale infatti -1.

Pertanto per a=0 il sistema è impossibile (teorema di Rouchè-Capelli).

Analizziamo ora il caso in cui a=b (con a non nullo).

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a \\ a & a^2 & a^3 & a^3 \end{bmatrix}$$

Per calcolare il rango di A possiamo escludere la terza colonna, in quanto proporzionale alla seconda; considerando le prime due colonne si osserva che se a=1 il rango è 1 mentre se a è diverso da 1 il rango è 2.

Per quando riguarda il rango di B, notiamo che se a=1 anche il suo rango è 1. Se a è diverso da 1 vediamo se il rango è 2 come quello di A oppure se può essere 3. A tale scopo, trascurando per quanto detto sopra la terza colonna calcoliamo il seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & a \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & a & a^3 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^2[a(a^2-a)-(a^2-a)+(0)] =$$

$= a^2(a^3-2a^2+a) = a^3(a^2-2a+1) = a^3(a-1)^2$ che è diverso da zero per a diverso da zero e da 1.

Quindi: se $a \neq 0$ ed $a = b$, quando a=b=1 il sistema è indeterminato, con $\infty^{n-r} = \infty^{3-1} = $ $= \infty^2$ soluzioni. Quando a e b sono diversi da 1 il sistema è impossibile, essendo il rango di A uguale a 2 ed il rango di B uguale a 3.

Concludendo:

se $a \neq 0 \ \ e \ \ a \neq b$: sistema determinato;
se $a = 0$: sistema impossibile;
se $a = b = 1$: sistema indeterminato, con ∞^2 soluzioni;
se $a = b \neq 1$: sistema impossibile.

b)

Posto che la terna (x; y; z) sia una soluzione del sistema [1], studiare la curva di equazione:

$$\boldsymbol{y - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{x}{a} + z}$$

e disegnarne l'andamento in un riferimento cartesiano ortogonale (Oab).

Dobbiamo risolvere il sistema quando è determinato, cioè quando $a \neq 0 \ \ e \ \ a \neq b$.

Il determinante D della matrice dei coefficienti vale $a^2(a-b)^2$.

Calcoliamo i determinanti $D_x, D_y\ e\ D_z$ delle matrici che si ottengono da A sostituendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza colonna con la colonna dei termini noti.

$$D_x = \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a & ab \\ a^2 b & a^2 & a^2 b \end{pmatrix} = a^5 + b^2a^4 - ba^5 - ba^4 = (-ab{+}a{+}b^2{-}b)a^4 =$$
$$= a^4(b-1)(b-a)$$

$$D_y = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & ba^2 & ba^2 \end{pmatrix} = ab^2 - b^2a^3 + ba^4 - ba^2 = ab(a^3{-}a{-}ba^2{+}b) =$$
$$= ab(a^2-1)(a-b)$$

$$D_z = \det\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \\ b & a^2 & ba^2 \end{pmatrix} = ba^2 - ab + a^2 - a^3 = a(-a^2{+}ab{+}a{-}b) = a(a-b)(1-a)$$

Quindi la soluzione del sistema (per il teorema di Cramer) è:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a^4(b-1)(b-a)}{a^2(a-b)^2} = \frac{a^2(1-b)}{a-b}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{ab(a^2-1)(a-b)}{a^2(a-b)^2} = \frac{b(a^2-1)}{a(a-b)}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{a(a-b)(1-a)}{a^2(a-b)^2} = \frac{(1-a)}{a(a-b)}$$

Sostituiamo in $y - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{x}{a} + z$:

$$\frac{b(a^2-1)}{a(a-b)} - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{a(1-b)}{a-b} + \frac{(1-a)}{a(a-b)}$$

Da cui:

$$b(a^2-1) - b = a^2(1-b) + 1 - a;\ \ b(a^2-1-1+a^2) = a^2+1-a;$$

$b = \frac{a^2-a+1}{2(a^2-1)}$ $(privata\ dei\ punti\ con\ a=0\ e\ a=b; cioè\ privata\ di\ \left(0;-\frac{1}{2}\right)$ e dei punti della curva che appartengono alla reta b=a, bisettrice del primo e terzo quadrante).

Passiamo quindi allo studio della funzione di equazione (prescindiamo, per ora, delle condizioni su a e b)

$$\boldsymbol{b = f(a) = \frac{a^2-a+1}{2(a^2-1)}}$$

Si tratta di una funzione razionale fratta in cui il grado del denominatore è uguale a quello del numeratore, quindi avremo un asintoto orizzontale e nessun asintoto obliquo.

Dominio:

$a \neq \pm 1$, $quindi$: $-\infty < a < -1 , -1 < a < 1 ,\quad 1 < a < +\infty$

La funzione **non pari né dispari** come si constata facilmente valutando f(-a), che è diverso sia da f(a), sia da –f(a).

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se a=0, b=-1/2.
Se b=0, $a^2 - a + 1 = 0$, $mai\ verificato\ perché\ il\ delta$ è $negativo$.

Segno della funzione:

$b > 0\ \ se\ \ \dfrac{a^2 - a + 1}{2(a^2 - 1)} > 0\ \ da\ cui, essendo\ a^2 - a + 1 > 0\ sempre,\ \ a^2 - 1 > 0$:

$a < -1\ vel\ a > 1$

Limiti:

$\lim_{a \to \pm\infty} \left(\frac{a^2-a+1}{2(a^2-1)}\right) = \lim_{a \to \pm\infty} \left(\frac{a^2}{2a^2}\right) = \frac{1}{2}$, quindi b=1/2 asintoto orizzontale, come già notato.

$\lim_{a \to (-1)^{\mp}} \frac{a^2-a+1}{2(a^2-1)} = \pm\infty$ (a = -1 asintoto verticale).

$\lim_{a \to (1)^{\mp}} \frac{a^2-a+1}{2(a^2-1)} = \mp\infty$ (a = +1 asintoto verticale).

Derivata prima:

$f'(a) = \frac{4a^2-16a+4}{8a^4-16a^2+8} = \frac{a^2-4a+1}{2(a^2-1)^2} \geq 0\ \ se\ \ a^2 - 4a + 1 \geq 0 :\quad a \leq 2 - \sqrt{3}\ ,\ \ a \geq \sqrt{3} + 2.$

La funzione è quindi crescente se $a < 2 - \sqrt{3}$, $a > \sqrt{3} + 2$ e decrescente se

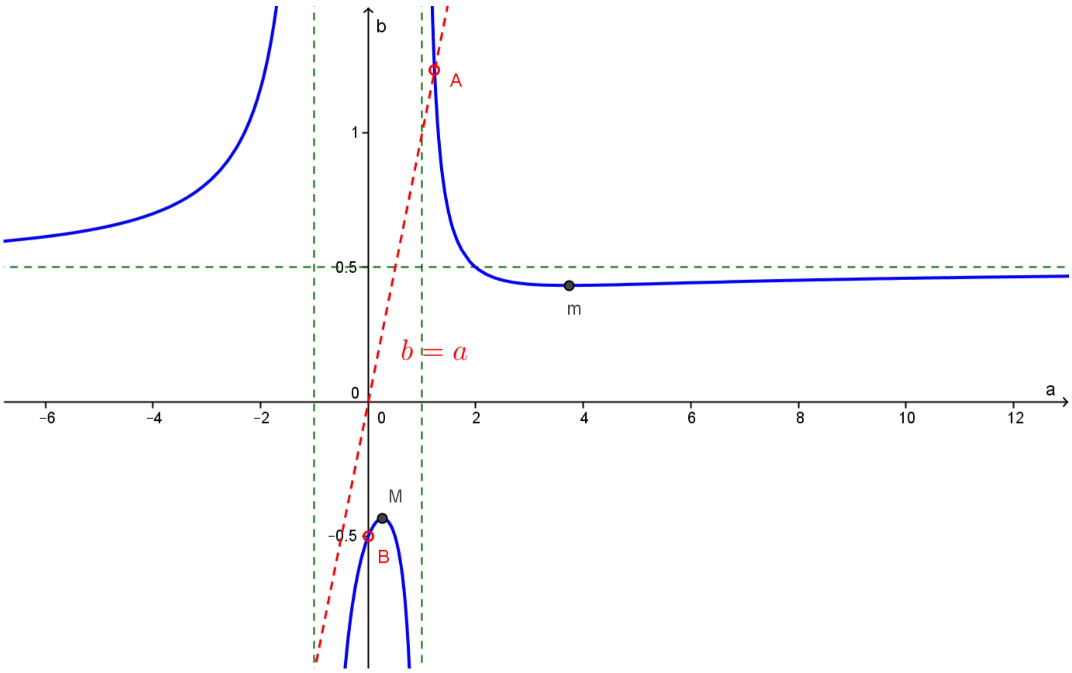
$2 - \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{3}$. Quindi $a = 2 - \sqrt{3}$ è punto di massimo relativo (ordinata $-\frac{\sqrt{3}}{4}$), $a = 2 + \sqrt{3}$ è punto di minimo relativo (ordinata $\frac{\sqrt{3}}{4}$). Notiamo che $\frac{\sqrt{3}}{4} < 0.5$, quindi la curva interseca l'asintoto orizzontale

Derivata seconda:

$$f''(a) = \frac{a^3 - 6a^2 + 3a - 2}{1 - 3a^2 + 3a^4 - a^6}$$

Senza indugiare nello studio della derivata seconda, possiamo dire che la funzione presenta un flesso per $a > \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Il grafico della funzione è il seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria