Scuole italiane all'estero (Americhe) 2003 – PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k}$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a)

Determinare a quali valori di k corrispondono curve continue su tutto l'asse reale.

Trattandosi di una funzione razionale fratta, essa è continua su tutto l'asse reale se il denominatore non si annulla mai; deve quindi essere $x^2 + k \neq 0 \ \ per\ ogni\ x \ \Rightarrow k > 0$

b)

Dimostrare che le curve assegnate hanno tre punti in comune.

Scriviamo la funzione in forma intera: $y(x^2 + k) = \ kx^3 + 9x\,,\ \ x^2y - 9x + k(y - x^3) = 0$
Si tratta di un fascio di curve con generatrici $x^2y - 9x = 0 \ \ e \ \ y - x^3 = 0$. I punti base di tale fascio sono i punti comuni a tutte le curve.

$$\begin{cases} x^2y - 9x = 0 = 0 \\ \quad y - x^3 = 0 \end{cases} \ ; \ \begin{cases} x^5 - 9x = 0 \\ \quad y = x^3 \end{cases} \ ; \ x(x^4 - 9) = 0 \ : \ \ x = 0 \ \ e\ x = \pm\sqrt{3}$$

Le curve assegnate hanno quindi in comune i tre punti:

$$A = (0; 0), \qquad B = \left(-\sqrt{3};\ -3\sqrt{3}\right), \qquad C = (\sqrt{3};\ 3\sqrt{3})$$

c)

Dimostrare che i tre punti sono allineati.

Per dimostrare che i tre punti sono allineati è sufficiente verificare che le loro coordinate soddisfano la relazione:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

Sostituendo le coordinate di A, B e C otteniamo:

$$\frac{\sqrt{3}-0}{-\sqrt{3}-0}=\frac{3\sqrt{3}-0}{-3\sqrt{3}-0}\ ,\qquad -1=-1:\ verificato.$$

Si può verificare facilmente che la retta su cui stanno A, B e C ha equazione: $y=3x$.

d)

Tra le curve assegnate determinare la curva γ avente per asintoto la retta di equazione $y=x$ e disegnarne l'andamento.

$$y=\frac{kx^3+9x}{x^2+k}$$

Osserviamo che, con k non nullo, tutte le curve ammettono un asintoto obliquo di coefficiente angolare k (il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominare). Deve quindi essere k=1. Verifichiamolo direttamente.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{kx^3+9x}{x^3+kx}=k=1\ ,\ \ q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=q=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{kx^3+9x}{x^2+k}-kx\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{kx^3+9x-kx^3-k^2x}{x^2+k}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{9x-k^2x}{x^2+k}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{9x-x}{x^2+1}\right]=0$$

Quindi si ha l'asintoto y=x per k=1. La curva γ richiesta ha equazione:

$$y=f(x)=\frac{x^3+9x}{x^2+1}$$

Studiamo questa funzione.

È una funzione definita e continua su tutto R, dispari, ($f(-x)=-f(x)$), interseca gli assi cartesiani solo nell'origine, è positiva quando $x^3+9x>0, x(x^2+9)>0: x>0$.
Ha solo l'asintoto obliquo già trovato, y=x. Per completare lo studio è sufficiente studiare la monotonia e la concavità.

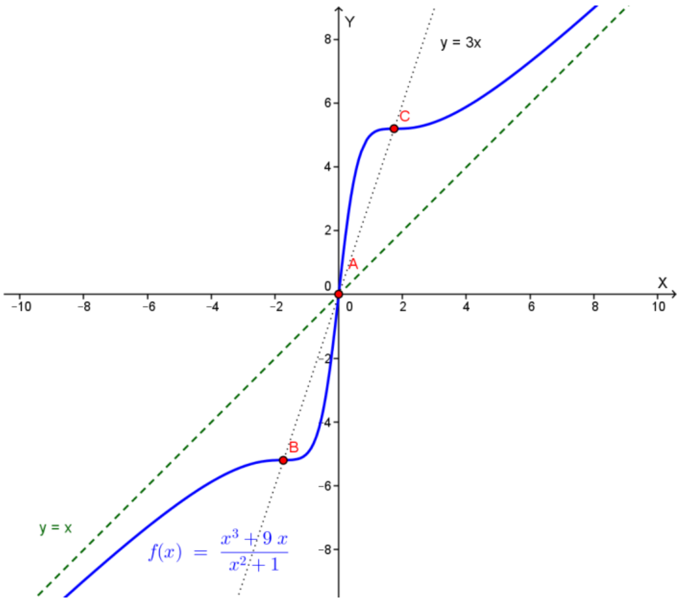
$f'(x)=\frac{(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2}\geq 0\ sempre\ ed$ è $f'(x)=0\ se\ x=\pm\sqrt{3}$: la funzione è quindi sempre crescente ed ha due flessi a tangente orizzontale per $x=\pm\sqrt{3}$ (i punti B e C).

Studiamo la concavità:

$$f''(x)=\frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\geq 0\ \ se\ \ x(x^2-3)\geq 0:\ -\sqrt{3}\leq x\leq 0\ ,\qquad x\geq\sqrt{3}$$

La curva quindi volge la concavità verso l'alto se $-\sqrt{3}<x<0\ \ e\ \ x>\sqrt{3}$ e verso il basso nella parte rimanente: come previsto, si hanno tre flessi per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$ (che corrispondono ai già citati punti A, B e C).

Il grafico della funzione è il seguente:



e)

Verificare che i tre punti comuni a tutte le curve assegnate sono flessi per la curva γ .

Abbiamo già verificato nel punto d) che i punti A, B e C (comuni a tutte le curve assegnate), sono flessi per la curva γ *.*

Con la collaborazione di Angela Santamaria