Scuole italiane all'estero (Americhe) 2003 – Quesiti

QUESITO 1

Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono α, β, γ . Sapendo che $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos\beta = \frac{12}{13}$, calcolare il valore esatto di $\cos\gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

Risulta $\cos\gamma = \cos[\pi - (\alpha+\beta)] = -\cos(\alpha+\beta) = -(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

Ricordando che il seno di un angolo di un triangolo è positivo, abbiamo:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$$

Pertanto:

$$\cos\gamma = -(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = -\left(\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13} - \frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13}\right) = 0 : \quad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Quindi il triangolo è rettangolo.

QUESITO 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva di equazione $y = \cos x - 2\sin x$. Determinare una traslazione degli assi che trasformi l'equazione nella forma $Y = k\sin X$.

Ricordiamo che la funzione lineare in seno e coseno $y = a\sin x + b\cos x$ si può scrivere nella forma: $y = R\sin(x+\alpha),\ con\ R = \sqrt{a^2+b^2}\ e\ tg\,\alpha = \frac{b}{a}$.
Nel nostro caso: $R = \sqrt{5} = k\ \ e\ \ tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$. Quindi:

$$y = \cos x - 2\sin x = -2\sin x + \cos x = \sqrt{5}\sin(x+\alpha),\ \ con\ \alpha = arc\,tg\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi,$$

$$con \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad essendo \quad a < 0 \quad e \quad b > 0, \qquad quindi \ \ \alpha = arc\,tg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi$$

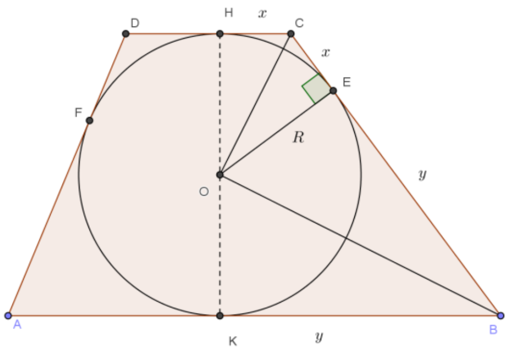
Ricordiamo che l'arcotangente assume valori fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

La traslazione di assi richiesta ha quindi equazioni:

$$\begin{cases} Y = y \\ X = x + arc\ tg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi \end{cases}$$

QUESITO 3

Un trapezio è circoscrittibile ad un cerchio. Dimostrare che il triangolo avente per vertici il centro del cerchio e gli estremi di uno dei lati obliqui è un triangolo rettangolo.



In base ad una nota proprietà della circonferenza gli angoli OCH e OCE sono congruenti; analogamente sono congruenti gli angoli OBE ed OBK. Essendo poi le rette AB e CD parallele, gli angoli HCE ed EBK sono supplementari, quindi OCE ed OBE sono complementari: segue che l'angolo BOC è retto.

QUESITO 4

x ed y sono due numeri naturali qualsiasi tali che $x - y = 1$. Stabilire se il numero $x^4 - y^4$ è divisibile per 2 o se non lo è.

Risulta: $x^4 - y^4 = (y+1)^4 - y^4 = [(y+1)^2 - y^2] \cdot [(y+1)^2 + y^2] =$

$= (2y+1) \cdot (2y^2 + 2y + 1)$

Siccome $(2y+1)$ è dispari e $2y^2 + 2y + 1 = 2(y^2 + y) + 1 = 2k + 1$ è anch'esso dispari, poiché il prodotto di due numeri dispari è dispari (*), si conclude che:

$x^4 - y^4 = (2y+1) \cdot (2y^2 + 2y + 1)$ è dispari, quindi non è divisibile per 2.

(*) $(2a+1)(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1 = 2k + 1: dispari$

QUESITO 5

Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$y = \log \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Deve essere:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0$$

Studiando il segno dei singoli fattori, la disequazione è soddisfatta per:

$$x < -3\,, \qquad -2 < x < -1\ , \qquad 1 < x < 2\ , \qquad x > 3$$

QUESITO 6

La funzione reale di variabile reale f (x) è derivabile in ogni x per cui risulti $1.0 \le x \le 1.1$; *inoltre* $f\,(1.1) = 0$ *e* $1.0 \le f'(x) \le 1.1$ *in ogni x dell'intervallo* $1.0 \le x \le 1.1$ *. Dimostrare che risulta:* $-0.11 \le f(1.0) \le -0.10$.

La funzione soddisfa il teorema di Lagrange nell'intervallo chiuso e limitato [1.0; 1.1], essendo continua in tale intervallo (dato che è derivabile) e derivabile nell'intervallo aperto (1.0; 1.1). Esiste quindi almeno un punto c nell'intervallo aperto (1.0; 1.1) tale che:

$$\frac{f(1.1) - f(1.0)}{1.1 - 1.0} = f'(c), \quad \frac{0 - f(1.0)}{0.1} = f'(c), \qquad \frac{-f(1.0)}{0.1} = f'(c)$$

Essendo $1.0 \le f'(x) \le 1.1$ *in ogni x dell'intervallo* $1.0 \le x \le 1.1$, risulta:

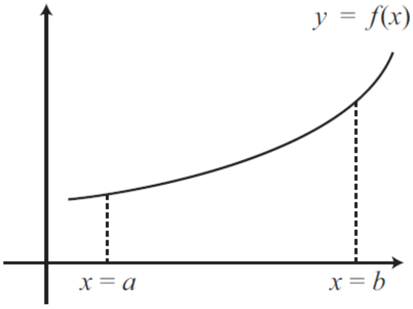
$1.0 \le \frac{-f(1.0)}{0.1} \le 1.1$, $0.1 \le -f(1.0) \le 0.11$ pertanto:

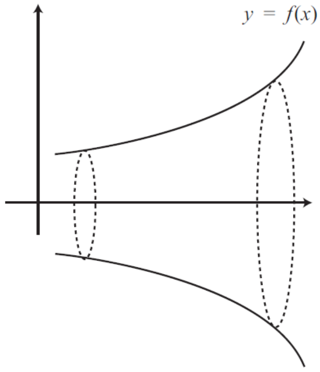
$$-0.11 \le f(1.0) \le -0.10\ .$$

QUESITO 7

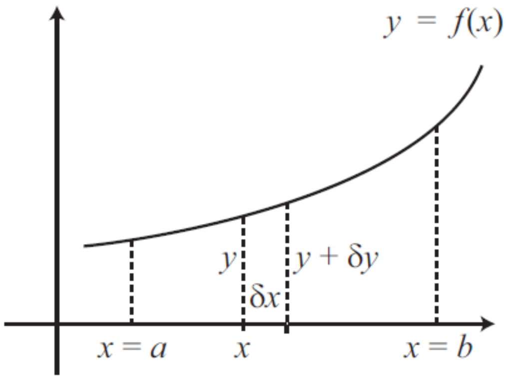
Sia f (x) una funzione continua e non negativa nell'intervallo chiuso e limitato $a \le x \le b$ *, rappresentata graficamente in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Indicata con R la regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette x = a e x = b, dimostrare che il volume V del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x è dato dalla formula seguente:*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$





Il volume richiesto può essere visto come somma degli infiniti solidi approssimabili a cilindri di volume: $\delta V = \pi r^2 h = \pi y^2 \delta x$



Quindi:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \delta V \\ &= \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \pi y^2 \delta x \\ &= \int_a^b \pi y^2 \mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

Come dire che:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria