Scuole italiane all'estero (Europa suppletiva) 2003 – PROBLEMA 1

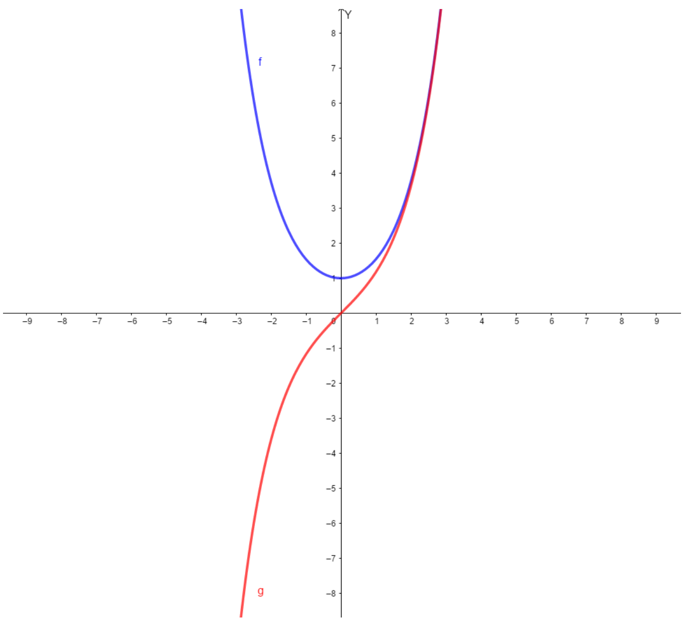
Considerate le funzioni

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\ , \quad g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

a)

Tracciate nel piano (t , y) i loro rispettivi grafici F e G.

Osserviamo che le funzioni f e g sono rispettivamente il coseno iperbolico ed il seno iperbolico. I loro grafico sono i seguenti:



Studiamo le due funzioni in modo autonomo:

$$\boldsymbol{y = f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}}$$

La funzione è definita e continua su tutto R, è sempre positiva, è pari (essendo $f(-t) = f(t)$) ed interseca l'asse y nel punto di ordinata 1.
I limiti a + e – infinito sono uguali a + infinito. Non ci sono asintoti.
Studiamo la derivata prima:
$f'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \geq 0\ se\ \ e^t \geq e^{-t},\ \ t \geq -t,\ \ t \geq 0$: la funzione è crescente per t>0 e

decrescente per t<0; t=0 è punto di minimo assoluto (ordinata 1).

Studiamo la derivata seconda:
$f''(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\geq 0\ \ per\ ogni\ t$: concavità sempre verso l'alto. Il grafico è quello indicato sopra con f (in blu).

$$\boldsymbol{y=f(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}}$$

La funzione è definita e continua su tutto R, è positiva se $e^t>e^{-t},\ \ t>-t\ ,\ \ t>0$.
Interseca gli assi cartesiani nell'origine ed è dispari (essendo $f(-t)=-f(t)$).

I limiti a + e – infinito sono uguali a + infinito e – infinito rispettivamente. Non ci sono asintoti.

Studiamo la derivata prima:
$f'(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}>0\ \ per\ ogni\ t$: la funzione è sempre crescente, non ci sono quindi massimi né minimi.

Studiamo la derivata seconda:
$f''(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\geq 0\quad se\ \ t\geq 0$: concavità verso l'alto se t>0, verso il basso se t<0. Il punto (0;0) è di flesso. Il grafico è quello indicato sopra con g (in rosso).

b)

Provate che un punto qualsiasi dell'iperbole $x^2-y^2=1$ *avente per ascissa* $f(t_1)$ *ha per ordinata* $g(t_1)$ *.*

Posto $x=f(t_1)=\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}$ ed $y=g(t_1)=\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}$, sostituiamo nell'equazione dell'iperbole per verificare che il punto di coordinate (x; y) la soddisfa:

$$\left(\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\right)^2=\frac{e^{2t_1}+e^{-2t_1}+2}{4}-\frac{e^{2t_1}+e^{-2t_1}-2}{4}=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1\ \ c.v.d$$

c)

Siano P e Q i punti rispettivamente di F e G aventi la medesima ascissa t_0 *. Stabilite se la distanza tra P e Q assume un valore di minimo o di massimo assoluto per qualche particolare valore di* t_0 *.*

I punti P e Q hanno coordinate: $P=\left(t_0;\ \frac{e^{t_0}+e^{-t_0}}{2}\right)\quad e\quad Q=\left(t_0;\ \frac{e^{t_0}-e^{-t_0}}{2}\right)$ ed osserviamo che P ha sempre ordinata maggiore di quella di Q; pertanto:

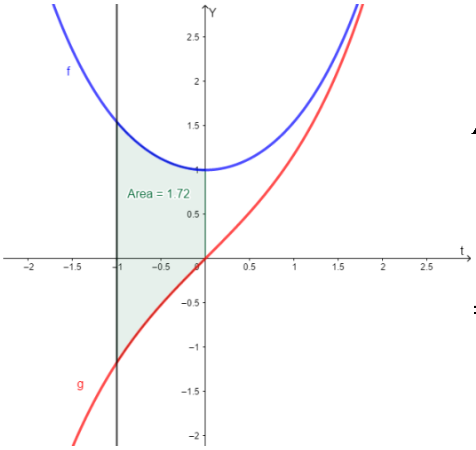
$PQ = y_P - y_Q = \frac{e^{t_0}+e^{-t_0}}{2} - \frac{e^{t_0}-e^{-t_0}}{2} = e^{-t_0}$.

La funzione $y = e^{-x}$ è sempre decrescente, quindi:
la distanza PQ non ammette massimo né minimo.

d)

Calcolate l'area della regione limitata da F , G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t = -1$ e quella della regione limitata da F , G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t = 1$.

La prima regione è la seguente:



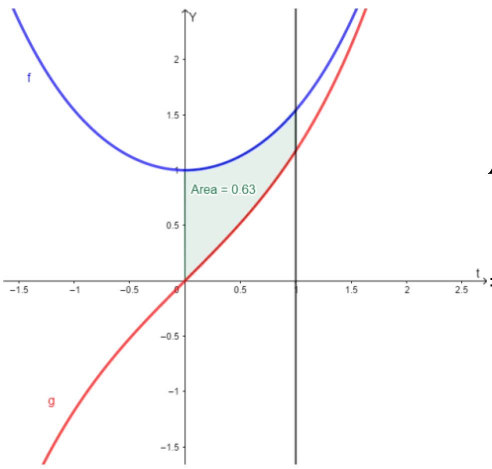
L'area di questa regione si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_{-1}^{0} [f(t) - g(t)]\,dt = \int_{-1}^{0} \left[\frac{e^t + e^{-t}}{2} - \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right] dt$$

$$= \int_{-1}^{0} [e^{-t}]\ dt =$$

$$= [-e^{-t}]_{-1}^{0} = -1 + e = (e-1)\,u^2 \cong 1.72\ u^2$$

La seconda regione è la seguente:



L'area di questa regione si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_{0}^{1} [f(t) - g(t)]\,dt = \int_{0}^{1} [e^{-t}]\ dt =$$

$$= [-e^{-t}]_{0}^{1} = -e^{-1} + 1 = \left(1 - \frac{1}{e}\right) u^2 \cong 0.63\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria