Scuole italiane all'estero (Europa suppletiva) 2003 – PROBLEMA 2

Determinare b e c affinché la parabola di equazione $y = -x^2 + bx + c$ *abbia il vertice in A(1; 6). Determinare altresì il parametro k in modo che l'iperbole di equazione xy = k passi per A.*

Imponiamo il passaggio per il punto e la condizione sull'ascissa di A per essere vertice:

$$\begin{cases} 6 = -1 + b + c \\ \dfrac{b}{2} = 1 \end{cases} ; \begin{cases} c = 5 \\ b = 2 \end{cases} : \quad y = -x^2 + 2x + 5$$

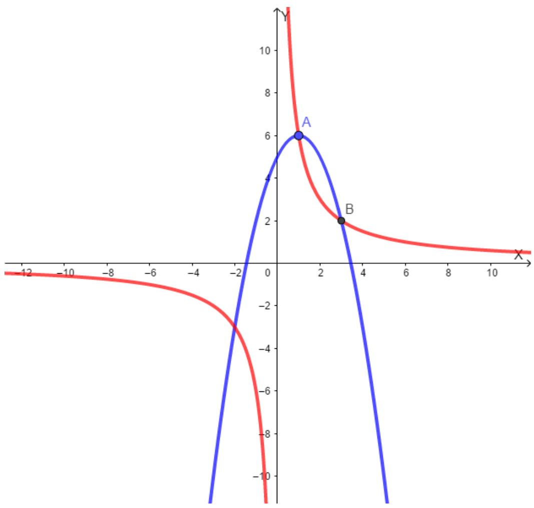
L'iperbole passa per A se: $1 \cdot 6 = k$, $\quad k = 6$

1)

Disegnare le due curve e determinare le coordinate dei loro ulteriori punti comuni indicando con B quello appartenente al primo quadrante.

La parabola ha vertice in A=(1; 6), taglia l'asse y per x=5 e l'asse x nei punti che hanno per ascissa le soluzioni dell'equazione: $-x^2 + 2x + 5 = 0$: $\quad x = 1 \pm \sqrt{6}$.

L'iperbole equilatera ha per asintoti gli assi cartesiani e passa per A.



Cerchiamo le intersezioni fra le due curve:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 5 \\ xy = 6 \end{cases} ; \ x(-x^2 + 2x + 5) = 6 \ ; \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Abbassando di grado con la regola di Ruffini, conoscendo la radice x=1, abbiamo:

$(x-1)(x^2-x-6)=0, da\ cui: \quad x=1, \qquad x=3, \qquad x=-2$

Il punto B ha quindi coordinate: $B=(3;2)$. Il terzo punto ha coordinate $(-2;\ -3)$.

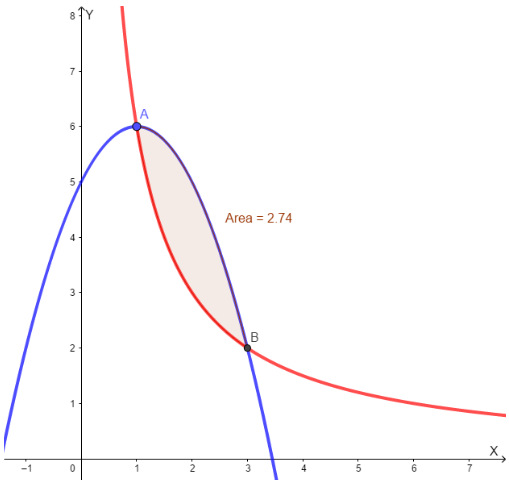
2)

Calcolare l'area della parte di piano limitata dai due archi AB della parabola e dell'iperbole.

L'area della regione richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_1^3\left(-x^2+2x+5-\frac{6}{x}\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x-6\ln|x|\right]_1^3=-9+9+15-6\ln 3-$$

$$-\left(-\frac{1}{3}+1+5\right)=\left(\frac{28}{3}-6\ln 3\right)\ u^2\cong 2.74\ u^2$$



3)

Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa, attorno all'asse y della medesima parte di piano.

Il volume richiesto si ottiene utilizzando il metodo dei gusci cilindrici (vedi la seguente pagina http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf):

$$V=2\pi\int_1^3 x\left[(-x^2+2x+5)-\left(\frac{6}{x}\right)\right]dx=2\pi\int_1^3(-x^3+2x^2+5x-6)\,dx=$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x-6x\right]_1^3=\frac{32}{3}\pi\ u^2=33.510\ u^2=V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria