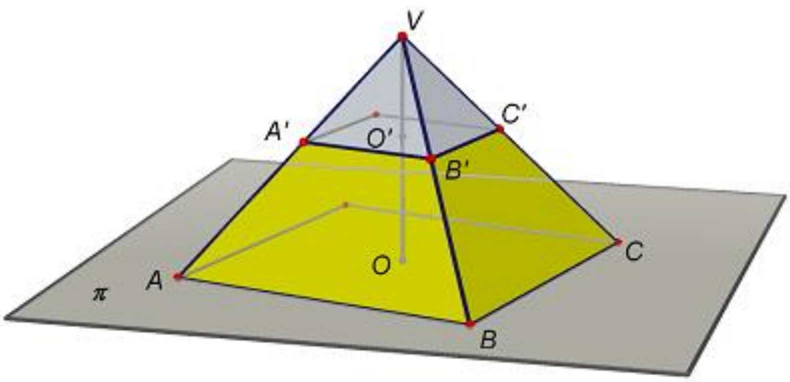
ORDINAMENTO 2003 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

E' data una piramide retta a base quadrata.

1)

Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b (a>b) e h rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprima in funzione di a, b, h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.



Per trovare il volume del tronco di piramide si sottrae al volume della piramide VABCD quello della piramide VA'B'C'D'.

Pongo VO' = x, O'O=h (l'altezza del tronco), quindi VO=h+x.

Per similitudine si ha: $\frac{VO'}{VO}=\frac{b}{a}$ (a è il lato della base maggiore) da cui ricavo $x=\frac{bh}{a-b}=VO'$

VO=h+x=$\frac{ah}{a-b}$. Il volume del tronco è dato quindi da:

$\frac{1}{3}a^2\frac{ah}{a-b}-\frac{1}{3}b^2\frac{bh}{a-b}=\frac{1}{3}h\left(a^2+b^2+ab\right)$=Volume tronco

2)

Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}\ dm^2$.

Il volume della piramide (con base un quadrato di dato lato a, e altezza variabile k) è dato da:

$$V(piramide) = \frac{1}{3} \cdot Area(base) \cdot altezza = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \overline{VO} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot k$$

La superficie laterale della piramide è data da:

$$S_l = semiperimetro(base) \cdot apotema = 2a \cdot \sqrt{k^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{3}$$

Elevando al quadrato membro a membro:

$$4a^2 \cdot \left(k^2 + \frac{a^2}{4}\right) = 3\ ,\ \ da\ cui: \quad a^2(4k^2 + a^2) = 3,\ \ a^4 + 4k^2a^2 - 3 = 0\ , \quad da\ cui:$$

$k^2 = \frac{3-a^4}{4a^2}$ con la condizione $3 - a^4 > 0$, $a^4 < 3$, $0 < a^2 < \sqrt{3}$, $0 < a < \sqrt[4]{3}$

Il volume della piramide assume quindi la forma (in funzione dell'altezza a):

$$V(piramide) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot k = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{\frac{3-a^4}{4a^2}} = \frac{1}{6} a\sqrt{3 - a^4}$$

Tale volume risulta massimo se lo è $a\sqrt{3 - a^4}$, e tale espressione, essendo positiva, è massima se lo è il suo quadrato, cioè la funzione:

$y = a^2(3 - a^4) = (a^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (3 - a^4)$: si tratta del prodotto delle potenze di due quantità (positive) a somma costante ($a^4 + (3 - a^4) = 3$), quindi l'espressione è massima se le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{a^4}{\frac{1}{2}} = \frac{3 - a^4}{1}\ , \qquad da\ cui: \quad 3a^4 = 3\ \ ,\ \ a^4 = 1\ \ ,\ \ a = 1.$$

Allo stesso risultato si arriva con il metodo delle derivate, studiando il segno della derivata della funzione $y = a^2(3 - a^4)$.

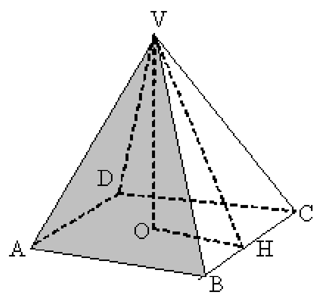
Il volume della piramide è massimo quando il lato del quadrato di basa misura 1 dm.

Calcoliamo il volume massimo:

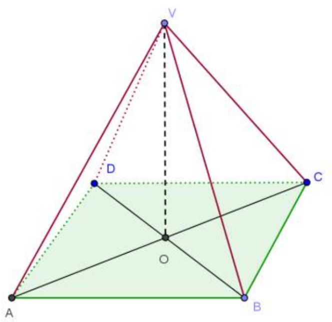
$$V = \frac{1}{6} a\sqrt{3 - a^4} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \sqrt{3 - 1} = \frac{1}{6}\sqrt{2}\ dm^3 = volume\ massimo$$

3)

Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.



La nostra piramide ha base quadrata di lato $a = VH = 1$, altezza $k = VO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $apotema = VH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Analizziamo una delle facce laterali; la sua area è ¼ della superficie laterale, quindi $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ricordiamo che l'area di un triangolo equilatero è uguale a $l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, nel nostro caso il lato vale 1, quindi il triangolo è equilatero: le facce della piramide sono triangoli equilateri di lato 1, perciò tutti gli spigoli della piramide misurano 1 dm; la piramide è quindi regolare.



Vediamo adesso come calcolare il raggio della sfera circoscritta alla piramide. Esso è pari alla distanza del centro della sfera da ciascun vertice della piramide.

Poiché il lato di base vale 1, le diagonali AC e BD valgono $\sqrt{2}$; pertanto AO, BO, CO e DO valgono $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ma anche VO vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$, pertanto tutte le distanze VO, AO, BO, CO e DO valgono $\frac{\sqrt{2}}{2}$: segue che O è il centro della sfera circoscritta e quindi il raggio (pari alla distanza di O da ciascuno dei vertici della piramide) vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$raggio\ sfera\ circoscritta\ alla\ piramide = \frac{\sqrt{2}}{2}\ dm$$

4)

Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

Calcoliamo il volume della sfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\ dm^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\ dm^3 \cong 1.481\ dm^3$$

Poiché un litro equivale ad un decimetro cubo, si ha:

$$Capacità\ in\ litri\ della\ sfera = 1.481\ litri$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria