ORDINAMENTO 2003 - SESSIONE SUPPLETIVA – QUESTIONARIO

QUESITO 1

Tra i rettangoli aventi la stessa area di $16\ m^2$ trovare quello di perimetro minimo.

Indicate con x ed y le misure della base e dell'altezza del rettangolo risulta :$x \cdot y = 16$; dobbiamo stabilire quando $2p = 2x + 2y$ è minimo, come dire $p = x + y\ \ minimo$.

Dimostrazione elementare

Consideriamo l'identità: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 2xy$, dove x ed y sono quantità positive; da questa identità deduciamo che il minimo di $(x+y)^2$, quindi anche il minimo di $x+y$, si ha quando è minima la quantità $(x-y)^2 + 2xy$, in cui 2xy è costante: tale quantità è quindi minima quando $(x-y)^2 = 0$, $x = y$.
"Se due grandezze positive hanno prodotto costante la loro somma è minima quando sono uguali", o anche:
"Tra tutti i rettangoli equivalenti il quadrato è quello di perimetro minimo".

Nel nostro caso il rettangolo di perimetro minimo è il quadrato di lato 4 m (se $x = y$ e $x \cdot y = 16$, allora $x^2 = 16$, da cui $x = 4$).

Dimostrazione analitica

Da $p = x + y$ e $x \cdot y = 16$ otteniamo:

$y = \frac{16}{x}$, $p = x + \frac{16}{x}$ con $0 < x \leq 16$; quindi:

$p' = 1 - \frac{16}{x^2} \geq 0$ se $\frac{16}{x^2} \leq 1$ da cui $x^2 \geq 16$ quindi $x \geq 4$.
Possiamo quindi dire che la funzione p presce se x>4 e decresce se 0<x<4: quindi per x=4 abbiamo un minimo relativo (che è anche assoluto); da x=4 in $x \cdot y = 16$ otteniamo che anche y=4: il rettangolo di perimetro minimo è quindi il quadrato di lato 4 m.

QUESITO 2

Cosa si intende per «funzione periodica»? Qual è il periodo della funzione $f(x) = sen\ x - 2\cos x$?

Una funzione f(x) si dice periodica di periodo T se T è il più piccolo numero reale positivo per cui: f(x+T)=f(x) per ogni x del dominio di f.

Determiniamo il periodo della funzione $f(x) = sen\, x - 2\cos x$ *utilizzando la definizione precedente.*
Il più piccolo numero reale positivo per cui: $sen(x+T) - 2\cos(x+T) = sen\, x - 2\cos x$ *è* $T = 2\pi$.

Il periodo della funzione $f(x) = sen\, x - 2\cos x$ *è* $T = 2\pi$ *.*

QUESITO 3

Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è $24\,\pi$.

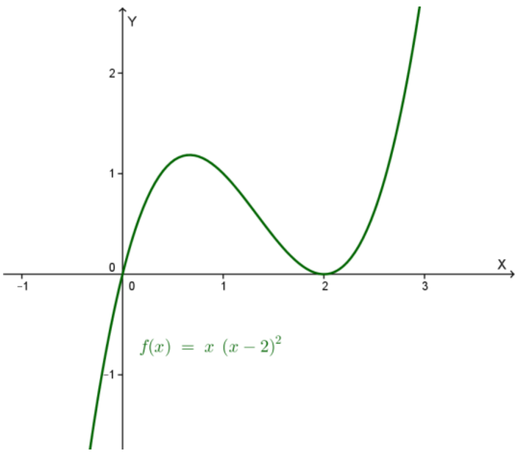
Per esempio la superficie laterale del cilindro è $S_l = 2\pi Rh$; tale valore è uguale a $24\,\pi$ se $Rh = 12$: per esempio R=3 e h=4 (raggio di base 3 e altezza 4).

Un altro esempio è il cono, la cui superficie laterale è $S_l = \pi Ra$ (R raggio di base, a apotema). Risulta $\pi Ra = 24\pi$ se $Ra = 24$, quindi, per esempio: $R = 2,\ a = 6$.

QUESITO 4

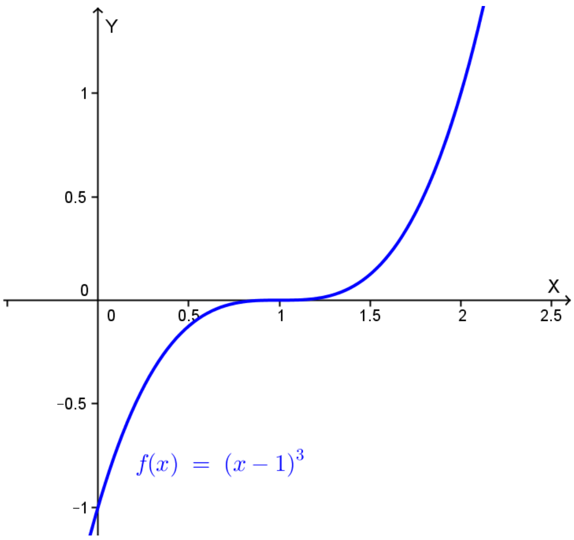
Provare che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione* $y' = 0$ *avendo posto* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$*.*
A quale condizione k è anche soluzione di $y'' = 0$ *?*

Se k è una soluzione doppia dell'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ allora il grafico della curva di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è tangente all'asse x per x=k; ciò vuol dire che x=k è un punto a tangente orizzontale, pertanto $y'(k) = 0$, come dire che k è soluzione di $y' = 0$. In figura un esempio con k=2.



Per essere soluzione anche di $y'' = 0$ vuol dire che x=k è punto di flesso (che esiste ed è unico per le cubiche): x=k deve quindi essere radice di ordine dispari dell'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cioè k deve essere soluzione tripla.

In figura un esempio con k=1.



QUESITO 5

Dare una giustificazione delle formule: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\,sen^2\alpha$ *e utilizzarle per provare che:* $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$.

In base alle formule di duplicazione risulta:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$ (che si ottiene dalla formula di addizione del coseno, ponendo

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - sen\alpha\, sen\alpha$).

Risulta quindi:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

Oppure:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - 2\,sen^2\alpha$

Calcoliamo adesso $\cos 4\alpha$:

$\cos 4\alpha = \cos[2(2\alpha)] = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 =$

$= 2(4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1) - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

QUESITO 6

Dimostrare che l'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ *ammette una sola soluzione reale.*

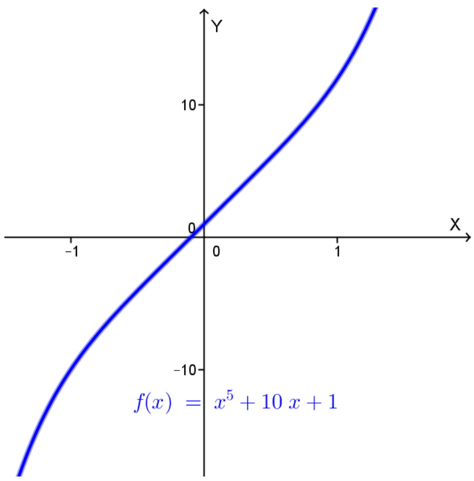
Trattandosi di un'equazione razionale intera di gradi dispari ammette almeno una soluzione reale; ciò vuol dire che la curva di equazione $\mathrm{y} = \mathrm{x}^5 + 10\mathrm{x} + 1$ interseca almeno una volta l'asse x (ciò deriva dalla continuità della funzione e dal fatto che i limiti al più o meno infinito sono infiniti di segno opposto, quindi il grafico deve tagliare almeno una volta l'asse x).

Per stabilire che l'equazione ammette una sola soluzione analizziamo la derivata prima della funzione associata:

$y' = 5x^4 + 10 \geq 0 \ per\ ogni\ x$: la funzione è quindi strettamente crescente, pertanto il grafico taglia una sola volta l'asse x:

l'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ ammette una sola soluzione reale.

Il grafico della funzione è di questo tipo:



QUESITO 7

Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange [da Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813)] e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

Il teorema di Lagrange afferma:

Sia y=f(x) una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a; b] e derivabile nell'intervallo aperto (a; b). Esiste allora almeno un punto c interno all'intervallo tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Da questo teorema segue il seguente corollario:

Sia y=f(x) una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a; b] e derivabile nell'intervallo aperto (a; b). Se f '(x)>0 allora la funzione è crescente, se f '(x)<0 allora la funzione è decrescente.

Questo corollario si dimostra ne modo seguente;

Una funzione è crescente in un certo intervallo se, scelti due generici punti $x_1\ ed\ x_2$ risulta:

$se\ x_1 < x_2 \quad allora \quad f(x_1) < f(x_2)$

Consideriamo l'intervallo $[x_1; x_2]$; in tale intervallo, contenuto in [a;b] sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange; esiste quindi almeno un punto c, con $x_1 < c < x_2$ tale che:

$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; se f '(x)>0, allora anche f '(c)>0; ma $x_1 < x_2$ quindi il denominatore della frazione è positivo ed allora dovrà essere positivo anche il numeratore, cioè: $f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad da\ cui \quad f(x_2) > f(x_1)$: la funzione è quindi crescente.

In modo analogo si dimostra che se f '(x)<0 allora la funzione è decrescente.

QUESITO 8

Di una funzione f (x) si sa che la sua derivata seconda è 2^x *e si sa ancora che:*
$f(0) = \left(\frac{1}{ln\,2}\right)^2 \quad e \quad f'(0) = 0$. *Qual è f (x)?*

Sappiamo che $f''(x) = 2^x,\ quindi\colon\ f'(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{ln2} + c$; ma $f'(0) = 0$ quindi:
$f'(0) = \frac{2^0}{ln2} + c = 0 \ ,\quad 0 = \frac{1}{ln2} + c \quad ,\quad c = -\frac{1}{ln2}$; pertanto:

$f'(x) = \frac{2^x}{ln2} - \frac{1}{ln2}$; segue che:

$$f(x) = \int \left(\frac{2^x}{ln2} - \frac{1}{ln2}\right) dx = \frac{1}{ln2}\int (2^x - 1)\, dx = \frac{1}{ln2}\left[\frac{2^x}{ln2} - x\right] + k$$

Da $f(0) = \left(\frac{1}{ln\,2}\right)^2$ segue che:

$f(0) = \frac{1}{ln2}\left[\frac{2^0}{ln2} - 0\right] + k = \frac{1}{ln2}\left[\frac{1}{ln2}\right] + k = \frac{1}{\ln^2 2} + k = \left(\frac{1}{ln\,2}\right)^2 \quad da\ cui \quad k = 0$; quindi:

$$f(x) = \frac{1}{ln2}\left[\frac{2^x}{ln2} - x\right]$$

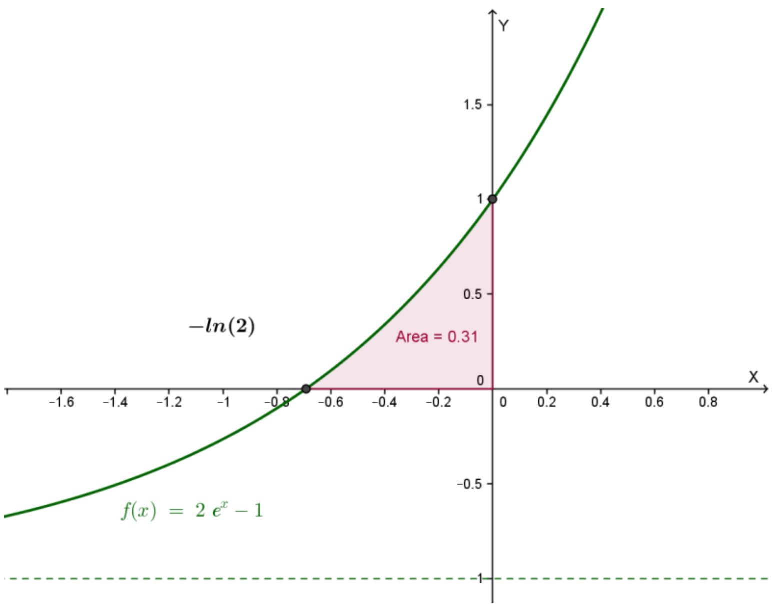
QUESITO 9

Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = 2e^x - 1$ *e dagli assi cartesiani.*

Il grafico della funzione si ottiene facilmente a partire dal grafico di $y = e^x$, eseguendo un a dilatazione verticale di fattore 2 $(y = 2e^x)$ ed una traslazione verso il baso di -1; le intersezioni con gli assi cartesiani sono:

se x=0: y=1
se y=0: $2e^x - 1 = 0$, $e^x = \frac{1}{2}$, $x = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

Il grafico, con evidenziata la regione di cui si chiede l'area, è il seguente:



L'area si ottiene calcolando il seguente integrale definito:

$$\color{red}{Area} = \int_{-\ln(2)}^{0} (2e^x - 1)dx = [2e^x - x]_{-\ln(2)}^{0} = 2 - \left(2 \cdot e^{-\ln(2)} + \ln(2)\right) =$$

$$= 2 - (1 + \ln(2)) = \color{red}{(1 - \ln(2))\, u^2 \cong 0.31\, u^2}$$

QUESITO 10

Definire gli asintoti – orizzontale, obliquo, verticale – di una curva e fornire un esempio di funzione f (x) il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Per una definizione completa di asintoto si veda la seguente pagina di matefilia:

http://www.matefilia.it/argomen/asintoti/asintoti.htm

Diamo ora un esempio di funzione con un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

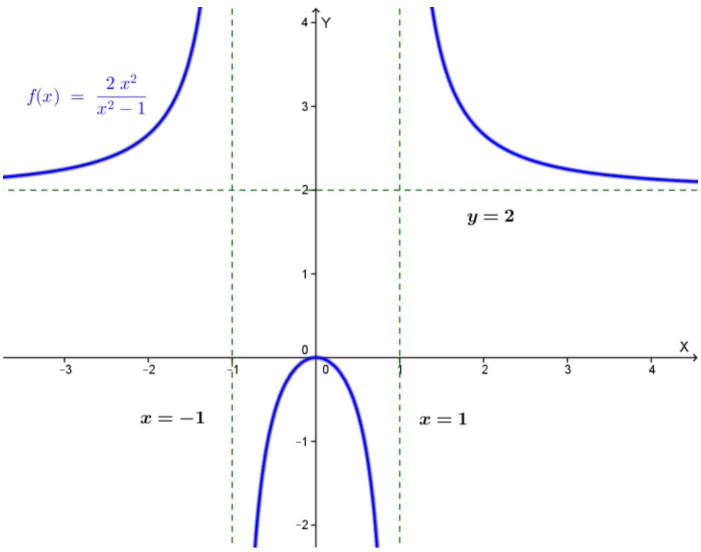
La seguente funzione razionale fratta soddisfa le condizione richieste:

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$$

La funzione ha l'asintoto orizzontale di equazione $y=2$, poiché la funzione, per x che tende a più o meno infinito, tende a 2.

La funzione ha gli asintoti verticali di equazione $x=1\ e\ x=-1$, poiché la funzione, per x che tende a più o meno uno tende ad infinito.

Il grafico della funzione indicata è il seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria