PNI 2003 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$\boldsymbol{y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2}$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

a)

Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

Intersechiamo la generica parabola con l'asse x:

$$\begin{cases} y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (a-1)x^2 - 2ax + a^2 = 0 \;\; ; \;\; \frac{\Delta}{4} = a^2 - a^2(a-1) \geq 0$$

$a^2(1-a+1) = a^2(2-a) \geq 0 \quad se \quad 2-a \geq 0\,, \quad a \leq 2$

Le parabole hanno punti in comune con l'asse x se $a \leq 2\,, \;\; con\; a \neq 1$.

b)

Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.

Calcolare l'ascissa del vertice della generica parabola:

$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2\,;\qquad x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2a}{2(a-1)} = \frac{a}{a-1} = a \quad se \quad a = a(a-1)$:
$a = 0 \; oppure \; a = 2$

Le due parabole con il vertice di ascissa a sono:

$a = 0$: $\; y = -x^2\,; \quad a = 2$: $\; y = x^2 - 4x + 4$

c)

Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.

Le parabole di equazioni: $y = -x^2 \quad e \quad y = x^2 - 4x + 4$ sono congruenti poiché hanno i coefficienti del termine di secondo grado uguali in valore assoluto; in tal caso, infatti, si può passare da una parabola all'altra mediante una traslazione (che porta il vertice di una nel vertice dell'altra) ed eventualmente una simmetria assiale (se i coefficienti del termine di secondo grado sono opposti). Oppure si può operare una simmetria con centro il punto medio del segmento che congiunge i due vertici.
Nel nostro caso si può passare dalla parabola di equazione $y = -x^2$ alla parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 4$ eseguendo:

- una simmetria rispetto all'asse x: otteniamo così $y = x^2$;
- una traslazione che porta il vertice di questa, che è (0;0), nel vertice della seconda parabole, che è (2;0). Tale traslazione ha equazioni:
  $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y \end{cases}$; $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$; la parabola $y = x^2$ diventa:

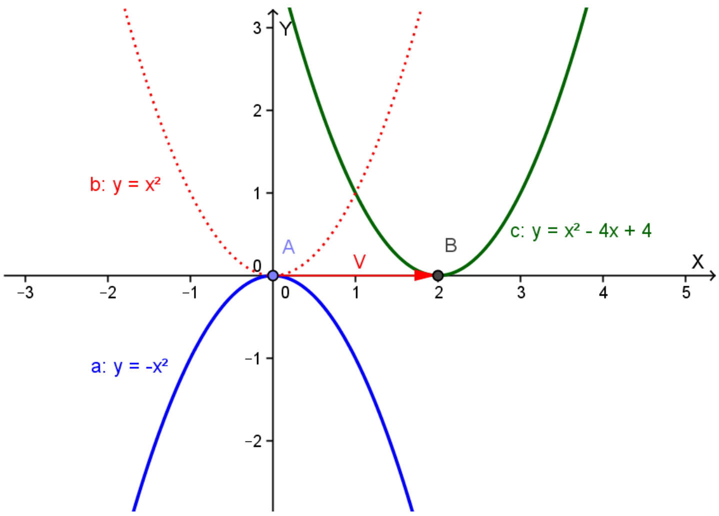
  $Y = (X - 2)^2 = X^2 - 4X + 4$, che coincide con la seconda parabola.

Allo stesso risultato si perviene se applichiamo alla parabola $y = x^2$ la simmetrica di centro (1;0), che è il punto medio del segmento che congiunge i due vertici; tale simme tria ha equazioni:

$$\begin{cases} X = 2a - x = 2 - x \\ Y = 2b - y = -y \end{cases} ; \begin{cases} x = 2 - X \\ y = -Y \end{cases} ; \; quindi \;\; y = -x^2 \;\; diventa \;\; -Y = -(2 - X)^2 \text{ cioè:}$$

$Y = X^2 - 4X + 4$ che equivale alla seconda parabola.

Rappresentiamo graficamente le due parabole per evidenziare meglio quanto detto:



d)

Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2\,;\qquad x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2a}{2(a-1)} = \frac{a}{a-1};\quad y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{a^2(2-a)}{(a-1)}$

Quindi il luogo ei vertici ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{a-1} \\ y = \frac{a^2(a-2)}{a-1} \end{cases} \quad con \quad a \neq 1\,;\ \ eliminiamo\ il\ parametro\ per\ trovare\ l'equazione\ cartesiana.$$

$$\begin{cases} (a-1)x = a \\ y = \dfrac{a^2(a-2)}{a-1} \end{cases} \ ;\ \begin{cases} a = \dfrac{x}{x-1} \\ y = \cdots \end{cases} \ ;\ x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\left(\frac{x}{x-1}-2\right)}{\frac{x}{x-1}-1}$$

$$y = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\left(\frac{x-2x+2}{x-1}\right)}{\frac{x-x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x^2(2-x)}{(x-1)^3}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} = y \ \ (con\ x \neq 1):\ luogo\ dei\ vertici\ L\,.$$

Dobbiamo studiare la seguente funzione:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}}$$

Dominio: $x \neq 1\ ,\quad -\infty < x < 1 \ \cup \quad 1 < x < +\infty$

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=0 ; se y=0: x=0 e x=2.

Simmetrie notevoli: visto il dominio, la funzione non può essere pari né dispari.

Limiti:

$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \pm\infty$ (può esserci asintoto obliquo, che effettivamente c'è, poiché si tratta di una funzione razionale fratta il cui grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore).

$\lim_{x\to 1^\mp} \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} = +\infty$: x=1 è asintoto verticale destro e sinistro.

Cerchiamo l'asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} - mx\right] = \lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} + x\right] = \lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{2x^2 - x^3 + x^3 - 2x^2 + x}{(x-1)^2}\right] =$$

$= \lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{x}{(x-1)^2}\right] = 0$: asintoto obliquo $y = -x$.

Eventuali intersezioni con l'asintoto obliquo:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = \dfrac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} = -x \quad da\ cui\ x = 0 \quad \frac{x(2-x)}{(x-1)^2} = -1\ ;$$

$2x - x^2 = -x^2 + 2x - 1$: $mai\ verificato.$

L'asintoto obliquo interseca quindi il grafico della funzione nel punto (0;0).

Derivata prima:

$y' = \dfrac{-x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} \geq 0 \quad se \quad -\dfrac{x}{x-1} \geq 0 \quad (x^2 - 3x + 4 > 0\ per\ ogni\ x\ perch$è $\Delta < 0)$

Quindi $y' \geq 0 \ \ se \ \ \frac{x}{x-1} \leq 0$: $0 \leq x < 1$
La funzione è quindi crescente se $0 \leq x < 1$ e decrescente se $x < 0 \ \ e \ \ x > 1$:

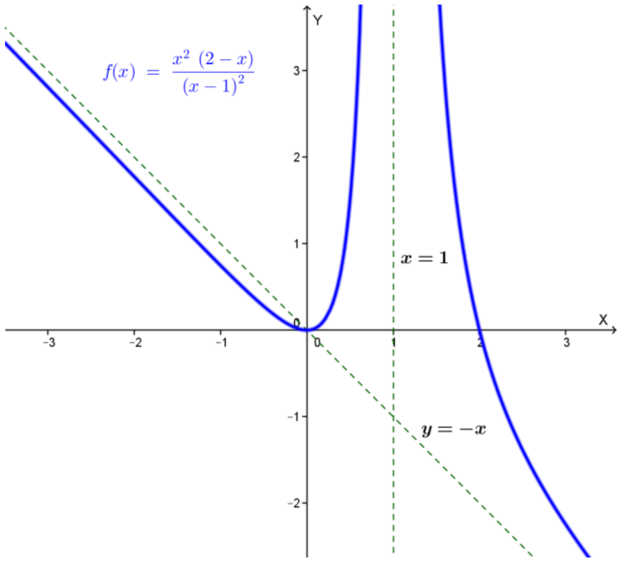
$x = 0$ è punto di minimo relativo, con ordinata $y = f(0) = 0$.

Derivata seconda:

$y'' = \frac{2(x+2)}{(x-1)^4} \geq 0 \ \ se \ \ x \geq -2 \ \ (con\ x \neq 1)$; pertanto:

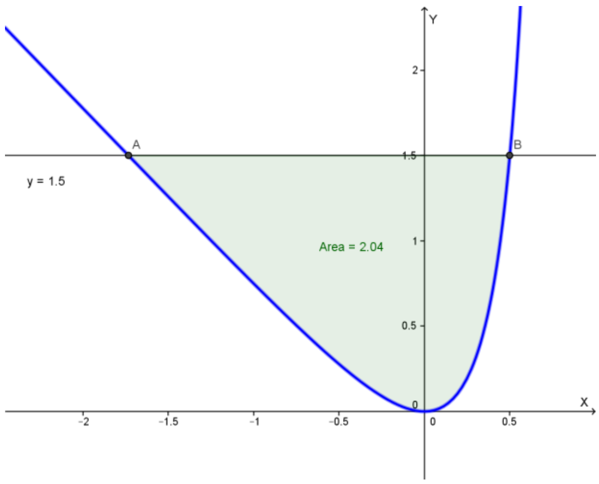
il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto se $x > -2 \ \ (con\ x \neq 1)$ e verso il basso se $x < -2 =$ x=-2 è punto di flesso, con ordinata: $f(-2) = \frac{16}{9}$; $F = \left(-2; \frac{16}{9}\right)$.

La funzione ha il seguente grafico:



e)

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}$.



Cerchiamo le intersezioni tra la retta e la curva:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} \end{cases} \implies \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} = \frac{3}{2} \quad , \qquad 2x^2(2-x) = 3(x-1)^2 \ ,$$

$$2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0 \ , \quad (2x-1)(x^2-3) = 0 : \quad x = \frac{1}{2} \quad e \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Le intersezione che ci interessano sono:

$$A = \left(-\sqrt{3}: \frac{3}{2}\right) \quad e \quad B = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3}{2} - \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}\right] dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x^3 - x^2 - 6x + 3}{2(x^2 - 2x + 1)}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x^3 - x^2 - 6x + 3}{x^2 - 2x + 1}\right) dx$$

Eseguendo la divisione tra il numeratore e il denominatore otteniamo:

$2x^3 - x^2 - 6x + 3 = (x^2 - 2x + 1)(2x + 3) - 2x$; quindi:

$$\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x^3 - x^2 - 6x + 3}{x^2 - 2x + 1}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \left(2x + 3 - \frac{2x}{x^2 - 2x + 1}\right) dx$$

$\frac{2x}{x^2-2x+1} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} = \frac{a+b(x-1)}{x^2-2x+1}$, $da\ cui$: $2x = bx + a - b$ e per il principio di identità dei polinomi si ha: b=2 a-b=0; quindi: b=2 e a=2. Ritornando all'integrale:

$$\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \left(2x + 3 - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \frac{1}{2}\left[x^2 + 3x + \frac{2}{x-1} - 2ln|x-1|\right]_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 4 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \left(3 - 3\sqrt{3} + \frac{2}{-\sqrt{3}-1} - 2\ln\left(\sqrt{3}+1\right)\right)\right] =$$

$$= \left[\ln\left(\sqrt{3}+1\right) + \ln(2) + 2\sqrt{3} - \frac{25}{8}\right] u^2 \cong 2.04\, u^2 = Area$$

L'area della regione richiesta è:

$$Area = \left[\ln\left(\sqrt{3}+1\right) + \ln(2) + 2\sqrt{3} - \frac{25}{8}\right] u^2 \cong 2.04\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria