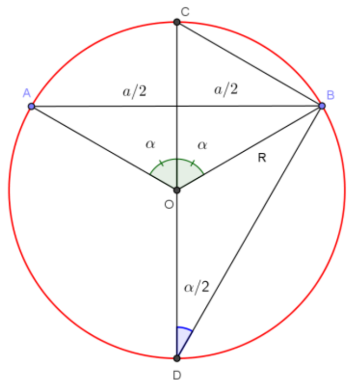
SESSIONE SUPPLETIVA PNI – 2003 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Nota lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data. (Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno).



La corda nota AB (di misura a, non superiore al diametro 2R) sia sottesa dall'angolo al centro 2α ; la corda BC è sottesa dall'angolo al centro metà del precedente, cioè α , Per il teorema della corda risulta:

$AB = a = 2R\, sen(\alpha)$, *da cui*: $sen(\alpha) = \frac{a}{2R}$; $BC = 2R\, sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

In base alle formule di bisezione, notato che $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, essendo $0 < \frac{\alpha}{2} < \pi/2$ risulta:

$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$, ma $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - sen^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2} = \frac{1}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2}$

Pertanto:

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2R - \sqrt{4R^2 - a^2}}{R}}$$

Ed infine:

$$BC = 2R\, sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = BC = 2R \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2R - \sqrt{4R^2 - a^2}}{R}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}} = BC$$

QUESITO 2

Nello spazio ordinario sono dati due piani α e β e una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β ? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Se r è parallela ad α vuol dire che è perpendicolare ad una sua normale a; se è perpendicolare a β sarà parallela ad una sua normale b: quindi a e b sono perpendicolari e pertanto i due piani α e β sono perpendicolari.

Dimostrazione analitica.

Le equazioni dei due piani e della retta r sono del tipo:

$$\alpha:\ \ ax+by+cz+d=0\ \ ,\quad \beta:\ \ a'x+b'y+c'z+d'=0$$

$$r:\ \begin{cases} x = x_0 + a't \\ y = y_0 + b't \\ z = z_0 + c't \end{cases}$$

(ricordiamo che se una retta è perpendicolare ad un piano ha i parametri direttori proporzionali a quelli del piano).

Ma r è parallela ad α, quindi risulta: $aa' + bb' + cc' = 0$ (condizione di parallelismo tra retta e piano). Ma questa condizione è anche la condizione di perpendicolarità tra i due piani. Quindi: i due piani α e β sono perpendicolari.

QUESITO 3

Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ è l'insieme degli x reali tali che:

$A)\ x \le 0\ \ e/o\ \ x > 2;\ \ B)\ x \le 0\ \ e/o\ \ x \ge 2;\ \ C)\ x = 0\ e/o\ \ x > 2;\ \ D)\ x = 0\ e/o\ x \ge 2$

Il dominio della funzione data si ottiene risolvendo il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 2x \ge 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 0 \quad vel \quad x \ge 2 \\ \sqrt{x^2 - 2x} \le x \end{cases}$$

Risolviamo la seconda disequazione tenendo conto dei risultati della prima:

se $x \le 0$ la disequazione è verificata solo se $x = 0$ (per $x < 0$ avremmo una radice quadrata minore o uguale ad una quantità negativa).

Se $x \ge 2$ elevando ambo i membri della disequazione al quadrato (lecito perché il secondo membro è positivo) otteniamo:

$x^2 - 2x \leq x^2 \quad da\ cui \quad x \geq 0$ che diventa $\quad x \geq 2$ in base alla condizione iniziale.

Il dominio della funzione è quindi: $x = 0 \quad vel \quad x \geq 2$.

La risposta esatta è quindi la D.

QUESITO 4

Si consideri un polinomio di grado $n \geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale α è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = \alpha$.

Il polinomio ha equazione del tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad con \quad n \geq 2$$

La funzione di equazione $y = P(x)$ è una funzione razionale intera, quindi è continua e derivabile su tutto R. Se il polinomio ammette due zeri coincidenti con α allora è tangente all'asse x nel punto di ascissa $x = \alpha$; pertanto in tale punto abbiamo la tangente orizzontale e quindi la derivata prima si annulla anch'essa per $x = \alpha$.

Se il polinomio e la sua derivata prima si annullano per $x = \alpha$ allora abbiamo la tangente orizzontale nel punto di ascissa $x = \alpha$ quindi il grafico della funzione è tangente all'asse x in tale punto: il polinomio si annulla quindi (almeno) due volte per $x = \alpha$.
In realtà per $x = \alpha$ potremmo avere un flesso, quindi il polinomio potrebbe annullarsi più di due volte per $x = \alpha$, in particolare un numero dispari di volte (quindi almeno 3); ciò però può avvenire solo se il grado del polinomio è maggiore o uguale a 3.

QUESITO 5

Stabilire se esistono i limiti della funzione $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ per:

$a)\ x \to +\infty\,; \quad b)\ x \to -\infty\,; \quad c)\ x \to 0;$

e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

Caso a):

$$\lim_{x\to+\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = [F.I.\ \infty^0] = \lim_{x\to+\infty} e^{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^0 = 1$$

(l'esponente tende a zero poiché x è infinito di ordine superiore rispetto a ln(1+x)).

Caso b):

$\lim_{x \to -\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}: \; non\ ha\ senso, \qquad poichè\ la\ funzione\ è\ definita\ per\ x > -1\ e\ x \neq 0$

Caso c):

$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (si tratta di un limite notevole).

QUESITO 6

Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.
Dire se l'affermazione: «il sistema ammette la sola soluzione $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ *per ogni valore di k diverso da 1» è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.*

Trattandosi di un sistema lineare OMOGENEO esso ammette almeno una soluzione ($x = 0,\ y = 0,\ z = 0$) per ogni valore di k. Affinché la soluzione sia unica è necessario e sufficiente che il determinante della matrice dei coefficienti sia diverso da zero (Teorema di Cramer). Quindi (calcolando il determinante mediante il Teorema di Laplace rispetto alla prima riga):

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k(k^2-1) - (k-1) + (1-k) = (k-1)(k(k+1)-1-1) =$$
$$= (k-1)(k^2+k-2) = (k-1)(k+2)(k-1) = 0 \quad se \quad k = 1 \quad oppure \quad k = -2$$

Quindi il sistema la sola soluzione $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ per ogni valore di k diverso da 1 e da -2: l'affermazione è FALSA.

QUESITO 7

Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.

Riferiamo l'ellisse ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, ponendo il centro nell'origine degli assi e gli assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani; detti a e b i semiassi dell'ellisse, la sua equazione è:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Applichiamo all'ellisse l'affinità di equazioni (a e b positivi):

$$\begin{cases} X=\dfrac{x}{a} \\ Y=\dfrac{y}{b} \end{cases} \quad ; \quad rapporto\ di\ affinità:\ \ k=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{vmatrix}=\frac{1}{ab}$$

L'ellisse si trasforma nella circonferenza di equazione: $X^2+Y^2=1$, che ha raggio 1 e quindi area del cerchio corrispondente $\pi R^2=\pi$.
Ricordiamo che in un'affinità, dette S ed S' le aree di due figure corrispondenti, risulta:

$\frac{S'}{S}=|k|$; nel nostro caso S' è l'area del cerchio ed S quella della regione racchiusa dall'ellisse. Quindi:

$$\frac{\pi}{S}=\frac{1}{ab}\quad da\ cui\quad \boldsymbol{S=\pi ab.}$$

QUESITO 8

In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono date le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x'=(a+1)x-by+a \\ y'=(a-1)x+2by-1 \end{cases}$$

dove a, b sono parametri reali.
Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.

Ricordiamo che le equazioni di una similitudine diretta sono del tipo:

$$\begin{cases} x'=ax-by+p \\ y'=bx+ay+q \end{cases}$$

Nel nostro caso dovrà quindi essere:

$$\begin{cases} a+1=2b \\ a-1=b \end{cases}\quad da\ cui\quad \begin{cases} a+1=2a-2 \\ a-1=b \end{cases}\ ,\quad \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

La similitudine ha quindi equazioni:

$$\begin{cases} x'=4x-2y+3 \\ y'=2x+4y-1 \end{cases}$$

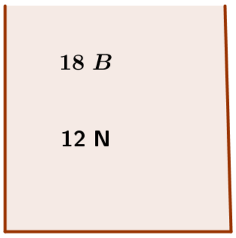
Il punto unito si ottiene ponendo x'=x ed y'=y:

$$\begin{cases} x = 4x - 2y + 3 \\ y = 2x + 4y - 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6x - 4y = -6 \\ -6x - 9y = -3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -13y = -9 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{9}{13} \\ 2x + \frac{27}{13} = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = \frac{9}{13} \\ 2x = 1 - \frac{27}{13} \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = \frac{9}{13} \\ x = -\frac{7}{13} \end{cases}$$ PUNTO UNITO $\left(-\frac{7}{13}; \frac{9}{13}\right)$

QUESITO 9

Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:
a) è bianca e viene rimessa nell'urna?
b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?
c) è messa da parte senza guardarne il colore?



Caso a): probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima è bianca e viene rimessa nell'urna.

$$p = \frac{p(seconda\ bianca\ \cap\ prima\ bianca)}{p(prima\ bianca)} = \frac{\frac{18}{30} \cdot \frac{18}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

(in effetti, se la prima pallina viene rimessa nell'urna, la probabilità che la seconda sia bianca è indipendente dall'esito della prima estrazione, quindi la probabilità che la seconda si bianca è appunto $\frac{18}{30}$)

Caso b): probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima è bianca e non viene rimessa nell'urna.

$$p = \frac{p(seconda\ bianca\ \cap\ prima\ bianca)}{p(prima\ bianca)} = \frac{\frac{17}{29} \cdot \frac{18}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{17}{29}$$

(in effetti, se la prima pallina è bianca e non viene rimessa nell'urna, essendo rimaste nell'urna 29 palline di cui 17 bianche, la probabilità richiesta è $\frac{17}{29}$).

Caso c): probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima viene messa da parte senza guardarne il colore.

Per il teorema della probabilità totale si ha:

$$p = p(seconda\ bianca\ \cap\ prima\ bianca) + p(seconda\ bianca\ \cap\ prima\ nera) =$$

$$= \frac{17}{29}\cdot\frac{18}{30} + \frac{18}{29}\cdot\frac{12}{30} = \frac{17\cdot 18 + 18\cdot 12}{29\cdot 30} = \frac{18\cdot 29}{29\cdot 30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

QUESITO 10

Considerata l'equazione in x:

$ax^2 + bx + c = 0$

dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con $a \neq 0$, scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

Scriviamo un algoritmo in pseudo-linguaggio:

```
INIZIO
a:=0
mentre a=0
   leggi a,b,c;
delta:=b^2-4*a*c;
se delta<0 allora
   scrivi "l'equazione non ammette soluzioni reali";
   altrimenti
   se delta=0 allora
         inizio
            scrivi "l'equazione ammette due soluzioni reali coincidenti";
            x=-b/(2*a);
            scrivi "x1=x2= ",x);
         fine;
         altrimenti
             inizio
                scrivi ("l'equazione ammette due soluzioni reali distinte");
                x1:=(-b-sqrt(delta))/(2*a);
                x2:=(-b+sqrt(delta))/(2*a);
                scrivi "x1= ",x1," x2= ",x2
             fine;
FINE.
```

Proponiamo il programma in pascal, che può essere provato on line al seguente indirizzo

http://www.tutorialspoint.com/compile_pascal_online.php

```
Program Equazione_secondo_grado;
var
a,b,c,x1,x2,x,delta:real;
begin
    a:=0;b:=0;c:=0;
    while a=0 do
        begin
            write('a= ');readln(a);
            write('b= ');readln(b);
            write('c= ');readln(c)
        end;
    delta:=b*b-4*a*c;
    if delta<0 then
        writeln('nessuna soluzione reale')
    else
        if delta=0 then
            begin
                writeln('due soluzioni reali coincidenti');
                x:=-b/(2*a);
                writeln('x1=x2= ',x:5:3)
            end
        else
            begin
                writeln('due soluzioni reali distinte');
                x1:=(-b-sqrt(delta))/(2*a);
                x2:=(-b+sqrt(delta))/(2*a);
                writeln('x1= ',x1:5:3,'   x2= ',x2:5:3)
            end;
end.
```

Con la collaborazione di Angela Santamaria