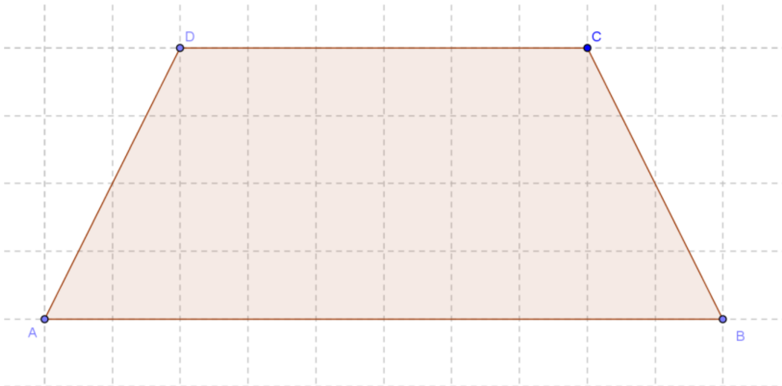
ORDINAMENTO 2003 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

La base minore, la base maggiore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine: $6\ cm, 10\ cm, 4(4+\sqrt{5})\ cm$.

Il lato obliquo del trapezio ha misura, in cm, uguale a:

$$\frac{16+4\sqrt{5}-(6+10)}{2}=2\sqrt{5}$$



a)

Dire, giustificando la risposta, se il trapezio è circoscrittibile a una circonferenza.

Il trapezio è circoscrittibile a una circonferenza se la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due. Nel nostro caso risulta:

$$AB+CD=16,\ \ AC+BD=2\sqrt{5}$$

Quindi Il trapezio NON è circoscrittibile a una circonferenza.

b)

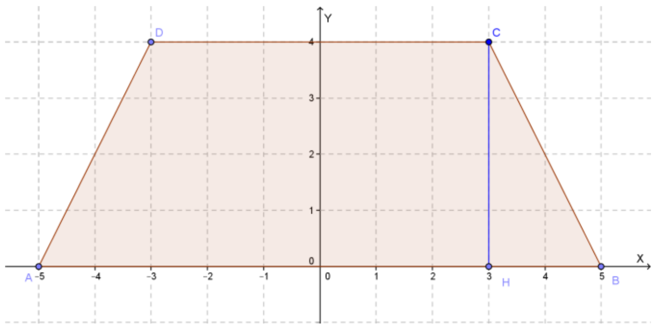
Spiegare perché il trapezio è inscrittibile in una circonferenza k.

Il trapezio è inscrittibile in una circonferenza perché gli angoli opposti sono supplementari. Infatti, essendo gli angoli in A e B congruenti, come pure gli angoli in C e D, essendo A e D supplementari (angoli coniugati interni formati fra le parallele AB e CD con la trasversale AD), risultano supplementari sia gli angoli in A e C sia glia angoli in B e D.

c)

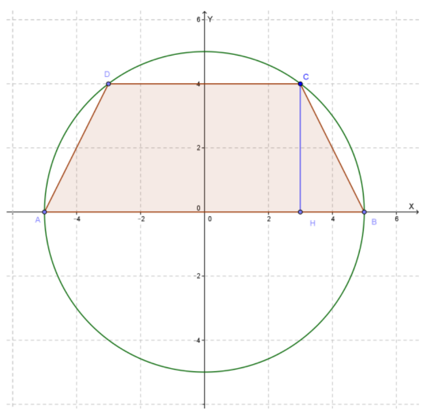
Dopo aver riferito il piano del trapezio a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione di k.

Fissiamo il sistema di riferimento ponendo l'origine O nel punto medio della base maggiore AB, l'asse x coincidente con la retta AB e l'asse y coincidente con la perpendicolare alla base maggiore nel suo punto medio:



Calcoliamo l'altezza CH del trapezio: $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4} = 4$

Con tale scelta del sistema di riferimento la circonferenza k ha il centro sull'asse delle y e passa per i punti $B = (5;0)\ e\ \ C = (3;4)$.



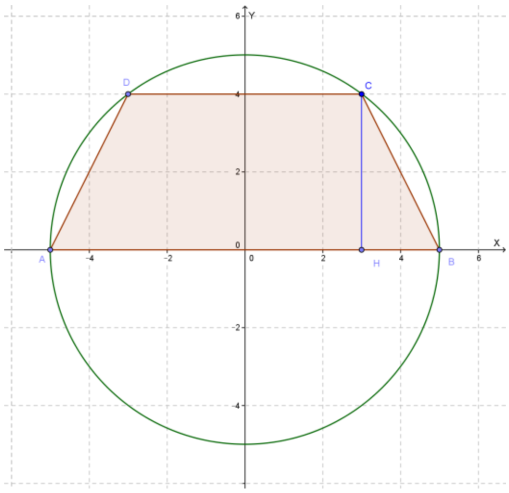
$k\colon\ x^2 + y^2 + by + c = 0$

Passaggio per B: $25 + c = 0\ \ , c = -25$
Passaggio per C: $9 + 16 + 4b + c = 0, \quad 4b = -25 - c = 0, \ \ b = 0$

La circonferenza k ha quindi equazione: $x^2 + y^2 = 25$.

d)

Trovare l'equazione della parabola p passante per gli estremi della base minore del trapezio e avente l'asse perpendicolare a tale base e il vertice nel centro di k.

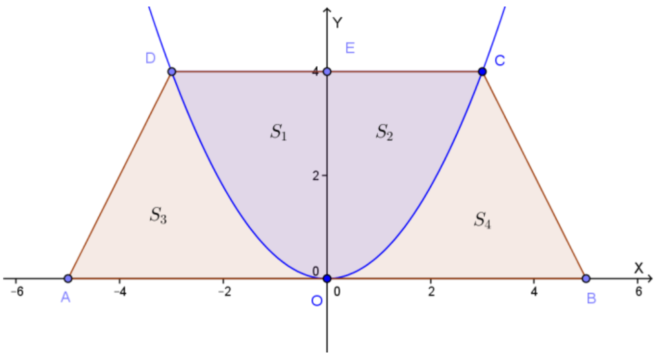


La parabola p ha equazione del tipo: $y = ax^2$. Basta imporre il passaggio per $C = (3; 4)$:

$4 = 9a$, $a = \frac{4}{9}$. Quindi p ha equazione: $y = \frac{4}{9}x^2$.

e)

Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il trapezio.



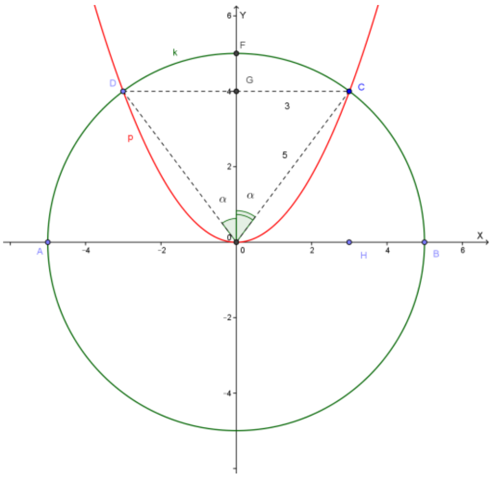
Calcoliamo l'area del segmento parabolico CDO:

$Area(S_1 + S_2) = \frac{2}{3} \cdot CD \cdot OE = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 4 = 16\, u^2$; $Area(OBCE) = \frac{(5+3) \cdot 4}{2} = 16\, u^2$ quindi:

$Area(S_4) = Area(S_3) = 16\, u^2 - 8\, u^2 = 8\, u^2$

f)

Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k.



La regione DOCF si ottiene sommando al segmento parabolico DOC il segmento circolare DCF; quest'ultimo si ottiene sottraendo al settore circolare DOCF il triangolo DCO.

Posto $S = Area\ (settore\ circolare\ DOCF)$ risulta:

$$S: Area(cerchio) = 2\alpha : 2\pi \quad \Longrightarrow \quad S = \frac{25\pi \cdot 2\alpha}{2\pi} = 25\alpha \quad (con\ \alpha \quad espresso\ in\ radianti)$$

Ma risulta: $sen(\alpha) = \frac{3}{5}$ $, quindi \quad \alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$, pertanto:

$$S = 25\alpha = 25 \cdot arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$$

Risulta poi: $Area\ (triangolo\ DOC) = 12\ u^2$ quindi:

$$Area\ (segmento\ circolare\ DOCF) = \left(25 \cdot arcsen\left(\frac{3}{5}\right) - 12\right)\ u^2$$

Ma allora:

$$Area\ (\mathrm{DOCF}) = 16\ u^2 + \left(25 \cdot arcsen\left(\frac{3}{5}\right) - 12\right)\ u^2 = \left(4 + 25 \cdot arcsen\left(\frac{3}{5}\right)\right)\ u^2$$

L'area A della seconda parte in cui la parabola divide il cerchio si ottiene sottraendo all'area del cerchio l'area della regione DOCF):

$$A = \left(25\pi - 4 - 25 \cdot arcsen\left(\frac{3}{5}\right)\right)\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria