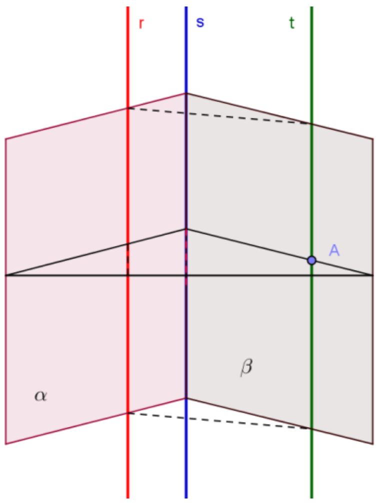
# ORDINAMENTO 2003 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

## QUESITO 1

*Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.*

La proprietà è vera.

Sia r parallela ad s e sia $\alpha$ il piano contenente r ed s. Sia poi s parallela ad una retta t e sia $\beta$ il piano contenente s e t. Le rette r e t sono parallele: esse appartengono al piano che contiene r ed un punto A di t e non possono avere alcun punto in comune.
Notiamo che se consideriamo il piano perpendicolare a t in A, tale piano è anche perpendicolare ad s (se due rette dello spazio sono parallele, un piano perpendicolare ad una è perpendicolare anche all'altra), che è parallela a t, e ad r (che è parallela ad s): r, s e t sono quindi perpendicolari allo stesso piano e pertanto sono parallele.




## QUESITO 2

*In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:*

$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0$ *dove k è un parametro reale.*

*Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:*

1) *un punto; 2) due punti; 3) infiniti punti; 4) nessun punto.*

L'equazione $8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0$ rappresenta una circonferenza (reale, non reale o degenere in un punto).

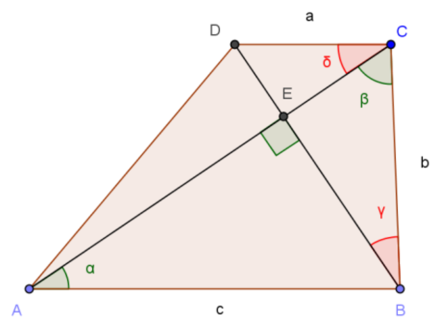
L'equazione è equivalente a $x^2 + y^2 - \frac{k}{2}x + y - \frac{3}{8}k = 0$ che è del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ .

Risulta: $R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{k^2}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}k = \frac{1}{16}(k^2 + 6k + 4) = 0 \;\; se \;\; k = -3 \pm \sqrt{5}$
Si hanno i seguenti casi:

1. $R^2 = 0, \; k = -3 \pm \sqrt{5}$: la circonferenza si riduce ad un punto.
2. Il luogo non può mai essere costituito da due punti.
3. $R^2 > 0, \; k < -3 - \sqrt{5} \;\; vel \;\; k > -3 + \sqrt{5}$ : la circonferenza è reale, il luogo è costituito da infiniti punti.
4. $R^2 < 0, \;\; -3 - \sqrt{5} < k < -3 + \sqrt{5}$: la circonferenza non è reale, il luogo è costituito da nessun punto.

## QUESITO 3

*Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.*




Supponiamo che le diagonali del trapezio siano perpendicolari e dimostriamo che a, b e c sono in progressione geometrica, cioè che $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

Essendo gli angoli $\alpha \; e \; \gamma$ congruenti (complementari dello stesso angolo $\beta$) i triangoli BCD e ABC sono simili, quindi si ha: a:b=b:c, che è la tesi.

Supponiamo ora che valga la relazione $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ e dimostriamo che le diagonali del trapezio sono perpendicolari.

In base all'ipotesi i due triangoli rettangoli BCD e ABC sono simili (avendo un angolo congruente ed i lati che lo comprendono proporzionali), quindi gli angoli corrispondenti

sono congruenti, cioè l'angolo opposto al lato a del triangolo BCD ($\gamma$) è congruente all'angolo opposto al lato b (corrispondente ad a) del triangolo ABC ($\alpha$). Ma l'angolo $\alpha$ è complementare di $\beta$, quindi anche $\gamma$ è complementare di $\beta$, ne segue che l'angolo CEB è retto: le diagonali sono quindi perpendicolari.

## QUESITO 4

*Dire se è vero che risulta:* $\sqrt{x^2+2x\sqrt{3}+3} = x+\sqrt{3}$ *per ogni x reale e giustificare la risposta.*

Risulta $\sqrt{x^2+2x\sqrt{3}+3} = \sqrt{\left(x+\sqrt{3}\right)^2} = \left|x+\sqrt{3}\right|$ , quindi la relazione è falsa.

## QUESITO 5

*Si consideri la funzione polinomiale in x:*

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ .

*Dimostrare che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione* $y = a_0 + a_1x$.

Il punto di ascissa 0 è $A = (0; a_0)$; la tangente in tale punto ha equazione:

$y - a_0 = y'(0)(x-0)$

Risulta: $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$ , $y'(0) = a_1$ quindi la tangente richiesta ha equazione:

$y - a_0 = a_1x$ , $y = a_1x + a_0$ come richiesto.

## QUESITO 6

*Si consideri la successione di termine generale* $a_n$ *tale che:*

$$a_n = \begin{cases} 1 & se\ \ n = 1 \\ a_{n-1} + n & se\ \ n > 1 \end{cases}$$

Calcolare $a_{100}$.

La successione ha come elementi:
$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2,\quad a_3 = a_2 + 3 = 1 + 2 + 3,\quad a_4 = 1 + 2 + 3 + 4$
$a_n = 1 + 2 + \cdots + n$

Osserviamo che $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (somma dei primi n termini di una progressione aritmetica con primo termine 1 e ragione 1: $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$), quindi:
$a_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$, pertanto: $a_{100} = \frac{100(101)}{2} = 5050.$

## QUESITO 7

*Considerata la successione di termine generale* $a_n = \frac{2}{3^n}$ *, calcolare*
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Risulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots\right) =$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right) = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1$$

**N.B.**

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ è la somma dei primi n termini di una progressione geometrica con primo termine $a_1 = \frac{1}{3}$ e ragione $q = \frac{1}{3}$; tale somma è uguale a: $a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ .

## QUESITO 8

*Considerata la funzione f (x) tale che:*

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)\, dt\,, \qquad con\ \ x > 0\,,$$

*determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.*

Per trovare gli zeri della funzione dobbiamo calcolare l'integrale. Risulta:

$$\int (1 - lnx)dx = \int (x)'\,(1 - lnx)dx = x(1 - lnx) - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx = x(1 - lnx) + x + c =$$

$= 2x - xlnx + c$ . Quindi:

$$\int_0^x (1 - \ln t)\, dt = \lim_{a\to 0^+} \int_a^x (1 - \ln t)\, dt = \lim_{a\to 0^+} [2t - t \cdot lnt]_a^x =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} [2x - x \cdot lnx - 2a + a \cdot lna] = 2x - xlnx$$

(ricordiamo che $a \cdot lna$ tende a 0 se a tende a zero più ).

Pertanto $f(x) = 2x - xlnx = 0 \;\; se \;\; 2 - lnx = 0, \;\; da\ cui \;\; x = e^2$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta poi:

$f'(x) = 1 - lnx$ e quindi:

$f'(x) > 0 \;\; se \;\; lnx < 1: \; 0 < x < e$.

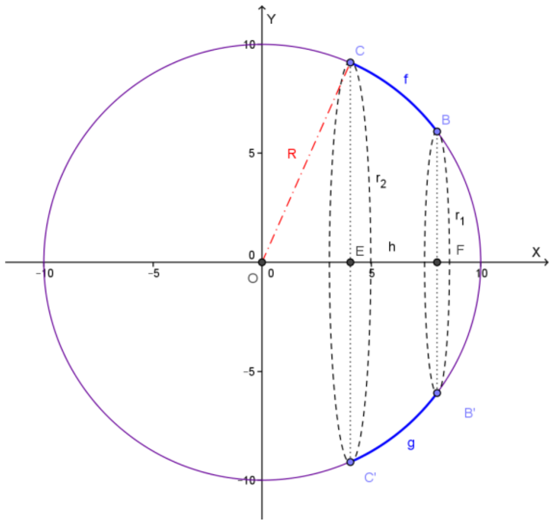
La funzione quindi cresce se $0 < x < e$ e decresce se $x > e$.

## QUESITO 9

*Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama segmento sferico a due basi. Indicati con $r_1$ ed $r_2$ i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:*

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2).$$

*Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.*




Consideriamo la circonferenza con centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio R. Il segmento sferico a due basi può essere ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x

dell'arco CB di circonferenza di ordinate rispettivamente $r_2 ed\ r_1$. Osserviamo che le ascisse di C e B sono OE ed OF, con EF=h. Abbiamo:

$OE = x_C = \sqrt{R^2 - r_2^2} \quad e \quad OF = x_B = \sqrt{R^2 - r_1^2} \quad con \quad x_B = x_C + h \quad e \quad h = x_B - x_c,$
$h^2 = x_B^2 + x_C^2 - 2x_B x_C \quad da\ cui \quad x_B x_C = \frac{x_B^2 + x_C^2 - h^2}{2}$

Tenendo presente che la circonferenza ha equazione $x^2+y^2=R^2$, il volume del segmento sferico si può calcolare mediante il seguente integrale:

$V=\pi\int_{x_C}^{x_B} f^2(x)dx$ con $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$

$$V=\pi\int_{x_C}^{x_B}(R^2-x^2)dx=\pi\cdot\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{x_C}^{x_B}=\pi\cdot\left[R^2x_B-\frac{1}{3}x_B^3-\left(R^2x_C-\frac{1}{3}x_C^3\right)\right]=$$

$$=\pi\cdot\left[R^2(x_B-x_C)-\frac{1}{3}(x_B^3-x_C^3)\right]=\pi\cdot\left[R^2(x_B-x_C)-\frac{1}{3}(x_B-x_C)(x_B^2+x_Bx_C+x_C^2)\right]=$$

$$=\pi\cdot(x_B-x_C)\left[R^2-\frac{1}{3}(x_B^2+x_Bx_C+x_C^2)\right]=$$

$$=\pi h\left[R^2-\frac{1}{3}\left(x_B^2+\frac{x_B^2+x_C^2-h^2}{2}+x_C^2\right)\right]=\pi h\left[R^2-\frac{1}{6}(3x_B^2+3x_C^2-h^2)\right]=$$

$$=\pi h\left[R^2-\frac{1}{6}(3(R^2-r_1^2)+3(R^2-r_2^2)-h^2)\right]=\pi h\left[R^2-R^2+\frac{1}{2}r_1^2+\frac{1}{2}r_2^2+\frac{1}{6}h^2\right]=$$

$=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r_1^2+3r_2^2)=V$ come volevasi dimostrare.

## QUESITO 10

*Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(1-e^{-t})\,dt}{sen^2x}$$

*essendo e la base dei logaritmi naturali.*

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applichiamo la regola di de l'Hôpital, di cui sono soddisfatte le ipotesi (le funzioni al numeratore e al denominatore sono continue e derivabili e la derivata del denominatore non si annulla in un intorno dello 0 privato dello 0 stesso). Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{D\left[\int_0^x(1-e^{-t})\,dt\right]}{D[sen^2x]}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{2senxcosx}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{senx}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=\frac{1}{2}\quad quindi:$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(1-e^{-t})\,dt}{sen^2x}=\frac{1}{2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria