ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

a.s. 2002/2003

Sessione straordinaria

(CORSO SPERIMENTALE – PNI ed altri)

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

È assegnata la seguente equazione in x:

$$x^3 + 2x - 50 = 0 \text{ , con } x \in \Re \text{ .}$$

a) Dimostrare che ammette una ed una sola soluzione $\overline{x}$.

b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \overline{x} < z + 1$.

c) Scrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato di $\overline{x}$ a meno di 10^{-4}.

d) Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale k (k^1 -1) per cui la curva C_k di equazione:

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k\,(x^3 + 2x - 75)$$

ammette un massimo e un minimo relativi.

e) Stabilire se esiste un valore $\overline{k}$ di k per cui la curva $C_{\overline{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.

PROBLEMA 2.

Un gruppo di persone è costituito da 3 uomini e dalle rispettive mogli. Ciascun uomo sceglie a caso una fra le 3 donne, con uguali possibilità di scelta, per un giro di ballo.

a) Calcolare quante sono le possibili terne di coppie di ballerini.

b) Calcolare la probabilità che:

1) nessun uomo balli con la propria moglie,

2) un solo uomo balli con la propria moglie,
3) tutti e tre gli uomini ballino con le rispettive mogli.

c) Il gioco viene effettuato per n volte. Calcolare:
1) per n=24, il numero medio di volte in cui tutti e tre gli uomini ballano con le rispettive mogli;

2) per n=4, la probabilità che non più di 2 volte capiti che nessun uomo balli con la propria moglie;
3) per n=60, la probabilità che esattamente 30 volte capiti che un solo uomo balli con la propria moglie;
4) per n=15, la probabilità che almeno 14 volte capiti che almeno un uomo balli con la propria moglie.

N.B.: Per l'uso che il candidato, se crede, ne può fare, si forniscono le formule della probabilità binomiale e della distribuzione normale:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ , } \quad y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (e \approx 2.7182,\ \pi \approx 3.1415) \text{ .}$$

QUESTIONARIO.

1) Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2)In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0 \text{ ,}$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) un punto; 2) due punti; 3) infiniti punti; 4) nessun punto.

3) In un piano sono date due circonferenze non congruenti, l'una esterna all'altra. Di omotetie che trasformano la minore nella maggiore ve ne sono:

A) nessuna;

B) una sola;
C) due soltanto;
D) infinite.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare in maniera esauriente la scelta operata.

4) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'affinità (A) di equazioni:

$$x = -2X + 3Y,\ y = X - 2Y.$$

Calcolare l'area della figura trasformata di un cerchio di raggio 1 secondo l'affinità (A).

5) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1),$$

scriverla in forma ricorsiva.

6) Scrivere un algoritmo che generi i primi 20 numeri della successione di cui al precedente quesito 5 e li comunichi sotto forma di matrice di 4 righe e 5 colonne.

7) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ \frac{1}{3} a_{n-1} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

8) Considerata la funzione f(x) tale che:

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)\,dt, \text{ con } x > 0,$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

9) Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama *segmento sferico a due basi*. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6}\pi h\left(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2\right).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

10) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left(1 - e^{-t}\right)dt}{\operatorname{sen}^2 x},$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'Istituto prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.