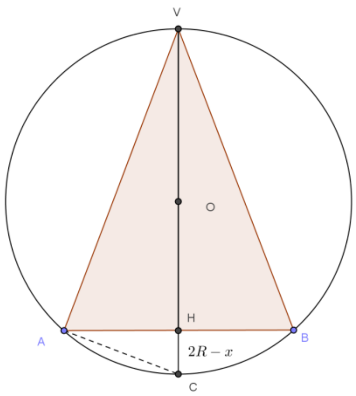
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2004 – PROBLEMA 1

Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 10 cm, si determini:

1)

il cono C di volume massimo e il valore, espresso in litri, di tale volume massimo.



Sia R il raggio della sfera e indichiamo con x l'altezza del cono VH (in figura è rappresentata una sezione del cono inscritto nella sfera ottenuta con un piano passante per il vertice V del cono e per la retta della sua altezza VH). Risulta:

$$0 < x < 2R$$

Per il secondo teorema di Euclide si ha:

$$AH^2 = VH \cdot HC = x(2R - x)$$

Il volume del cono inscritto è quindi (r raggio del cono):

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\, AH^2 \cdot VH = \frac{1}{3}\pi \cdot x(2R-x).x = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2(2R-x)$$

V è massimo se lo è: $y = x^2(2R-x) = (x)^2(2R-x)$

Trattandosi del prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante (x+2R-x=2R) esso è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{x}{2} = \frac{2R-x}{1} \;,\; 3x = 4R \;,\; x = \frac{4}{3}R$$

Allo stesso risultato si perviene dallo studio della derivata della funzione $y = x^2(2R-x)$

$$z' = 2x(2R-x) - x^2 = -3x^2 + 4xR \geq 0 \quad se \quad 3x^2 - 4xR \leq 0\text{:} \;\; 0 \leq x \leq \frac{4}{3}R$$

La funzione, continua, è quindi crescente se $0 < x < \frac{4}{3}R$ e decrescente se $\frac{4}{3}R < x < 2R$: è quindi massima se $x = \frac{4}{3}R$.

Il cono inscritto di volume massimo è quello di altezza $\frac{4}{3}R = \frac{4}{3} \cdot 10\ cm = \frac{40}{3}\ cm$; il suo volume è:

$$V(\max) = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2(2R-x) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{16}{9}R^2\right) \cdot \frac{2}{3}R = \frac{32}{81}\pi R^3 = \frac{32000}{81}\pi\ cm^3 \cong 1241.123\ cm^3 \cong$$
$$\cong 1{,}241\ dm^3 = 1{,}241 \quad litri$$

2)

Il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale di C.

Il cono C ha altezza $VH = x = \frac{4}{3}R$ e raggio di base $AH = \sqrt{x(2R-x)} = \sqrt{\frac{4}{3}R \cdot \frac{2}{3}R} = \frac{2}{3}R\sqrt{2}$

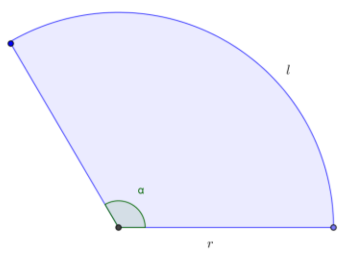
L'apotema AV è quindi uguale a:

$$AV = \sqrt{VH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{16}{9}R^2 + \frac{8}{9}R^2} = \sqrt{\frac{24}{9}R^2} = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$$

Il settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono ha quindi raggio $\frac{2}{3}R\sqrt{6}$ (corrispondente all'apotema del cono) e arco lungo quanto la circonferenza di base del cono, cioè $2\pi\ AH = 2\pi\frac{2}{3}R\sqrt{2} = \frac{4}{3}\pi R\sqrt{2}$; l'ampiezza in radianti dell'angolo del settore circolare è data dal rapporto tra la lunghezza dell'arco ed il raggio, quindi:

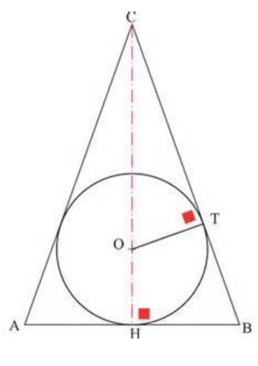
$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{\frac{4}{3}\pi R\sqrt{2}}{\frac{2}{3}R\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\ rad; \quad ma\ \alpha{:}\,\alpha° = \pi{:}\,180°, \qquad quindi{:}\ \alpha° = \frac{\alpha \cdot 180°}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 180°$$

Pertanto: $\alpha° \cong 207.846° \cong 207°50'46" \cong 208°.$



3)

Il raggio della sfera inscritta nel cono C e la percentuale del volume del cono che essa occupa.



Il cono C ha raggio di base $BH = \frac{20}{3}\sqrt{2}\ cm$, quindi:

$AB = \frac{40}{3}\sqrt{2}\ cm$. Indicato con C il vertice del cono, l'apotema è: $AC = BC = \frac{20}{3}\sqrt{6}$. L'altezza CH è 40/3 cm.

Quindi il semiperimetro del triangolo ABC è $p = \frac{20}{3}\sqrt{6} + \frac{20}{3}\sqrt{2}$

Il raggio r della circonferenza inscritta in ABC (pari al raggio della sfera inscritta nel cono) è dato da: $r = \frac{S}{p}$, essendo S l'area del triangolo ABC: $S = BH \cdot CH = \frac{20}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{40}{3} =$

$= \frac{800}{9}\sqrt{2}\ cm^2$; quindi: $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{800}{9}\sqrt{2}}{\frac{20}{3}\sqrt{6}+\frac{20}{3}\sqrt{2}} = \frac{\frac{800}{3}}{20(\sqrt{3}+1)} = \frac{40}{3(\sqrt{3}+1)}\ cm$

Il volume della sfera è quindi dato da:

$$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi\left(R_{sfera}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{40}{3\left(\sqrt{3}+1\right)}\right)^3\ cm^3$$

$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi(R_{cono})^2 h = \frac{32000}{81}\pi\ cm^3$$

Quindi:

$$\frac{V(sfera)}{V(cono)} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{40}{3\left(\sqrt{3}+1\right)}\right)^3}{\frac{32000}{81}\pi} = \left(\sqrt{3}-1\right)^3 = 6\sqrt{3}-10 \cong 0.392 \cong 39\ \% :$$

$V(sfera) \cong\ 39\ \%\ V(cono)$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria