Scuole italiane all'estero (Americhe) 2004 – PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x+a}{bx^2+cx+2} \quad (1)$$

1)

Si determinino i valori dei parametri che figurano nell'equazione (1) disponendo delle seguenti informazioni:
a) i valori di a, b, c sono 0 o 1;
b) il grafico G di f passa per (-1; 0);
c) la retta y=1 è un asintoto di f.

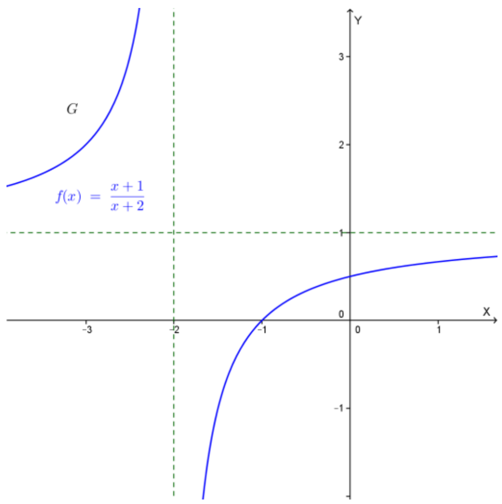
Passaggio per (-1; 0): $0 = \frac{-1+a}{b-c+2}$; $a = 1$. La retta y=1 è asintoto se $b = 0 \;\; e \;\; c = 1$, in tal modo il limite per x che tende all'infinito è uguale a 1. La funzione richiesta è quindi la funzione omografica di equazione:

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

2)

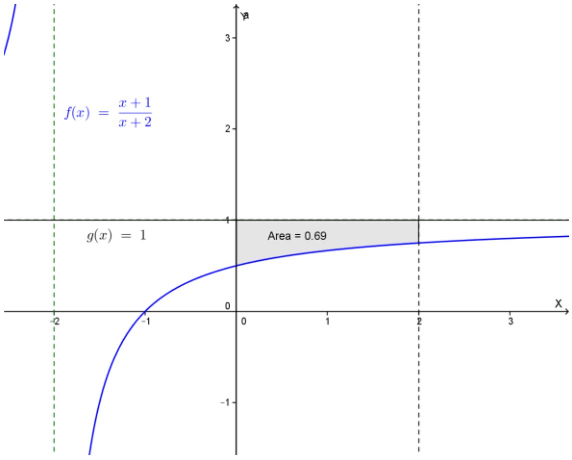
Si disegni G.

G è un'iperbole equilatera con centro in (-2; 1), asintoti x=-2 e y=1 e passante per (-1; 0); il suo grafico è quindi il seguente:



3)

Si calcoli l'area della regione finita di piano del primo quadrante degli assi cartesiani compresa tra l'asintoto orizzontale, il grafico G e le rette x = 0, x = 2.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^2 \left[1 - \left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right] dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{x+2}\right] dx = [\ln|x+2|]_0^2 = ln4 - ln2 = ln2\ u^2 \cong 0.69\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria