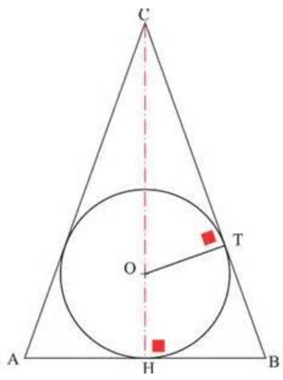
Americhe emisfero boreale 2004 – Sessione suppletiva
PROBLEMA 1

Tra i coni circoscritti ad una sfera di raggio 10 cm, si determini:

1)

il cono C di volume minimo e il valore, espresso in litri, di tale volume minimo.

Indichiamo con R il raggio della sfera.



Poniamo l'altezza CH del cono uguale ad x: CH=x, con x>2R. Per la similitudine fra i triangoli HBC e TCO risulta:

CT:OT=CH:BH ; inoltre:

$CT = \sqrt{OC^2 - OT^2} = \sqrt{(x-R)^2 - R\hat{}2} = \sqrt{x^2 - 2Rx}$

Pertanto:

$$\sqrt{x^2-2Rx}:R = x:BH \quad , \quad BH = \frac{Rx}{\sqrt{x^2-2Rx}} = \frac{R\sqrt{x^2-2Rx}}{x-2R}$$

Il volume del cono è pertanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot BH^2 \cdot CH = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x}{x-2R} \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x^2}{x-2R}, \quad con\ x > 2R$$

Tale volume è minimo se lo è:

$$y = \frac{x^2}{x-2R}$$

$$y' = \frac{x(x-4R)}{(x-2R)^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq 4R$$

Quindi y è crescente se $x > 4R$ e decrescente se $0 < x < 4R$: $x = 4R$ è punto di minimo assoluto.

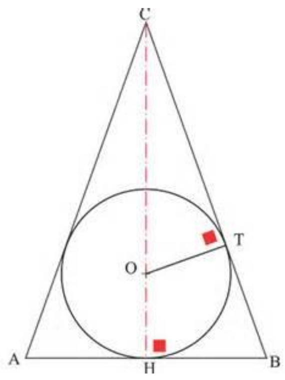
Il volume del cono C circoscritto ad una sfera di raggio R è minimo quando la sua altezza è uguale a 4R; il volume del cono vale in tal caso $\frac{8}{3}\pi R^3$.

Se R=10 cm, il cono C di volume minimo è quello di altezza h=40 cm ed il suo volume è:

$$V = \frac{8}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi \cdot 1000\ cm^3 = \frac{8}{3}\pi\ dm^3 = \frac{8}{3}\pi\ litri \cong 8.378\ litri = Volume\ minimo$$

2)

Il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale di C.



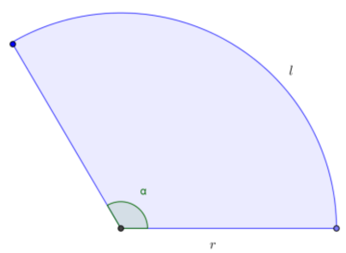
Il cono C ha altezza $CH = x = 4R = 40\ cm$. Per calcolare il raggio di base osserviamo che i triangoli COT e BCH sono simili, quindi: $BH: OT = CH: CT,\ \ BH = \frac{OT \cdot CH}{CT}$.

Ma $CT = \sqrt{OC^2 - OT^2} = \sqrt{30^2 - 10^2}\ cm = 20\sqrt{2}\ cm$. Quindi:

$$BH = \frac{OT \cdot CH}{CT} = \frac{10 \cdot 40}{20\sqrt{2}}\ cm = 10\sqrt{2}\ cm$$

Calcoliamo ora l'apotema del cono:

$$BC = \sqrt{CH^2 + BH^2} = \sqrt{40^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2}\ cm = 30\sqrt{2}\ cm$$



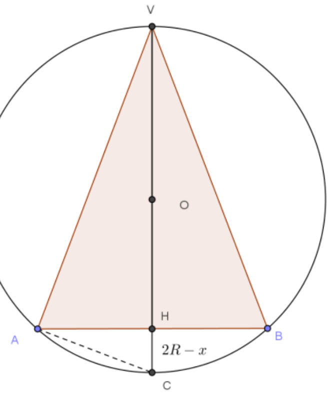
Il settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono ha quindi raggio $r = 30\sqrt{2}\ cm$ (corrispondente all'apotema del cono) e arco lungo quanto la circonferenza di base del cono, cioè $l = 2\pi\ BH = 2\pi \cdot 10\sqrt{2}\ cm = 20\pi\sqrt{2}\ cm$; l'ampiezza in radianti dell'angolo del settore circolare è data dal rapporto tra la lunghezza dell'arco ed il raggio, quindi:

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{20\pi\sqrt{2}}{30\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\pi\ \ rad = 120°.$$

3)

Il rapporto tra i volumi delle due sfere, inscritta e circoscritta a C.

Poiché il volume di una sfera è $V(sfera) = \frac{4}{3}\pi R^3$, occorre trovare il raggio della sfera circoscritta al cono C.



Sia R il raggio della sfera e indichiamo con x l'altezza VH del cono (in figura è rappresentata una sezione del cono inscritto nella sfera ottenuta con un piano passante per il vertice V del cono e per la retta della sua altezza VH). Risulta:

$$0 < x < 2R$$

Per il secondo teorema di Euclide si ha:

$AH^2 = VH \cdot HC = x(2R - x)$ da cui:

$$\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 40(2R - 40),\ \ 200 = 80(R - 20),\qquad \frac{5}{2} = R - 20,\ \ R = \frac{45}{2}\ cm$$

Il rapporto fra i volumi delle sfere inscritta e circoscritta al cono C è dato dal rapporto fra i cubi dei rispettivi raggi, quindi:

$$\frac{V(sfera\ inscritta)}{V(sfera\ circoscritta)} = \frac{10^3}{\left(\frac{45}{2}\right)^3} = \frac{64}{729}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria