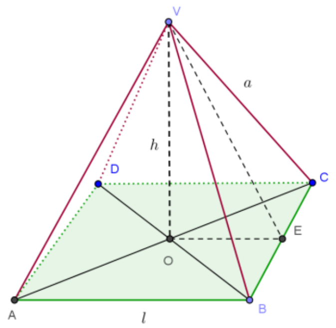
Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2004 – PROBLEMA 1

É assegnata una piramide retta a base quadrata il cui spigolo laterale misura a. Si determini:

a)

La piramide P di volume massimo e il rapporto di questo con il volume del cubo di spigolo unitario.



Il volume della piramide è:

$$V = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}l^2 h$$

Essendo $AC = l\sqrt{2}$, dal triangolo VOC, rettangolo in O, risulta: $h^2 + OC^2 = a^2$, da cui:

$h^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$, $h^2 + \frac{1}{2}l^2 = a^2$. Poniamo $h = x$, $con\ \ 0 \le x \le a$; si ha quindi:

$l^2 = 2a^2 - 2x^2$ e pertanto:

$$V = \frac{1}{3}l^2 h = \frac{1}{3}x(2a^2 - 2x^2) = \frac{2}{3}(a^2 x - x^3)$$

V è massimo se lo è $y = a^2 x - x^3$, con $0 \le x \le a$. Studiamo la derivata prima:

$$y' = a^2 - 3x^2 \ge 0 \quad se \quad x^2 \le \frac{a^2}{3} \quad , \qquad -a\frac{\sqrt{3}}{3} \le x \le a\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad quindi\ per \quad 0 \le x \le a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

La funzione y è quindi crescente per $0 \le x \le a\frac{\sqrt{3}}{3}$ e decrescente per $a\frac{\sqrt{3}}{3} < x \le a$

Pertanto y è massima per $x = a\frac{\sqrt{3}}{3}$. La piramide di volume massimo è quindi quella di altezza $h = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ e spigolo di base $l = \sqrt{2a^2 - 2x^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \sqrt{\frac{4}{3}a^2} = 2a\frac{\sqrt{3}}{3} = 2h$

(la piramide di volume massimo è quella che ha il lato di base doppio dell'altezza).

Il volume della piramide P vale quindi:

$$V(P) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}a^2 \cdot a\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{27}a^3\sqrt{3}$$

Il volume del cubo di spigolo unitario è 1, quindi il rapporto richiesto è $\frac{4}{27}a^3\sqrt{3}$.

b)

Di quanto si deve ridurre l'altezza di P per ridurne il volume del 10%, mantenendo inalterata la forma della piramide.

Diminuendo il volume del 10% , la nuova piramide P' avrà volume:
$V(P') = \frac{90}{100}\,V(P), quindi$: $\frac{V(P')}{V(P)} = \frac{9}{10}$. Mantenere inalterata la forma della piramide vuol dire che le due piramidi devono essere simili; detto k il rapporto di similitudine, risulta:
$\frac{V(P')}{V(P)} = k^3,\ quindi\ \ k^3 = \frac{9}{10}\ \ ,\ k = \sqrt[3]{\frac{9}{10}}$. Se le piramidi sono simili il rapporto fra le loro altezze è k, quindi, dette h' ed h le altezze di P' e P, risulta:

$$\frac{h'}{h} = k = \sqrt[3]{\frac{9}{10}},\quad h' = \left(\sqrt[3]{\frac{9}{10}}\right) h \cong 0.965\,h \cong 97\ \%\ \ di\ \ h$$

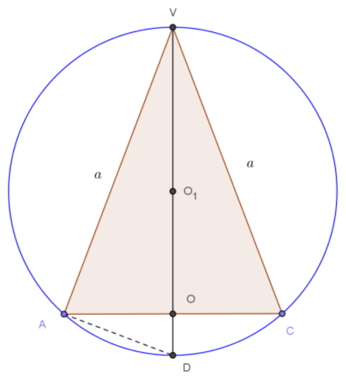
Quindi l'altezza si deve diminuire di circa il 3 %.

c)

La capacità in litri della sfera circoscritta a P quando $a = 1{,}2\, metri$.

Essendo VO perpendicolare ad AC la circonferenza passante per V, A e C è una circonferenza massima della sfera circoscritta alla piramide, quindi il raggio della piramide è uguale al raggio di questa circonferenza. Rappresentiamo la circonferenza circoscritta al triangolo VAC, che è isoscele sulla base AC ed ha i lati VA e VC di misura:

$VA = VC = a = 1{,}2\ m$. L'altezza VO è: $VO = h = a\frac{\sqrt{3}}{3} = 1{,}2\ \cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}4\sqrt{3}\, m$



Per il primo teorema di Euclide si ha:

$$AV^2 = VD\cdot VO = 2R\cdot 0{,}4\sqrt{3}\,,\quad 1{,}44 = 2R\cdot 0{,}4\sqrt{3}\ ,$$

$$R = \frac{1{,}44}{0{,}8\sqrt{3}} = 0.6\cdot\sqrt{3} = \left(\frac{3}{5}\cdot\sqrt{3}\right)\ m = R$$

La sfera ha volume:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{5}\cdot\sqrt{3}\right)^3\ m^3 \cong 4.701\ m^3 = 4701\ dm^3$$

Siccome $1\,dm^3 = 1\, litro$, la capacità della sfera è circa $4701\ \ litri$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria