Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2004 – PROBLEMA 2

La curva λ e la retta r hanno equazioni rispettive:

$$\lambda:\ y = x^3 - 15x - 4\ ,\quad r:\ y = mx$$

a)

Si denotino con A e B (A a sinistra di B) le intersezioni, nel secondo quadrante degli assi Ox e Oy, di λ con r, e con R ed S si denotino le regioni finite di piano così individuate: R delimitata da λ e dal segmento AB, S delimitata dall'asse (x)y, da λ e dal segmento (AO) BO ***(in rosso la modifica del testo suggerita da Leandro Gobbo, che ringraziamo).***

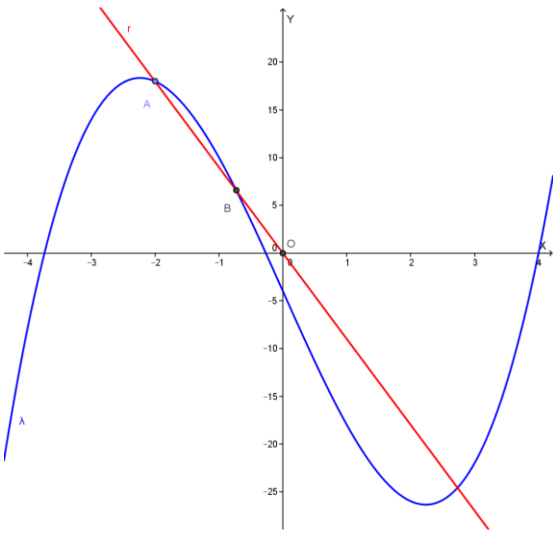
Studiamo la curva λ. Si tratta di una cubica, quindi è definita e continua su tutto R, che tende a $\pm\infty$ se x tende a $\pm\infty$, non ha asintoti. Analizziamo la derivata prima:

$$y' = 3x^2 - 15 \geq 0 \quad se\ \ x^2 \geq 5,\quad x \leq -\sqrt{5}\ \ or\ \ x \geq \sqrt{5}$$

La funzione è quindi crescente in tali intervalli e decrescente per $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$, pertanto $x = -\sqrt{5}$ è un punto di massimo relativo e $x = \sqrt{5}$ è un punto di minimo relativo.

Analizziamo la derivata seconda:
$y'' = 6x \geq 0\ \ se\ \ x \geq 0$: $x = 0$ è quindi il punto di flesso, con ordinata -4 (ricordiamo che tutte le cubiche hanno uno ed un solo punto di flesso, che è anche centro di simmetria per il grafico).

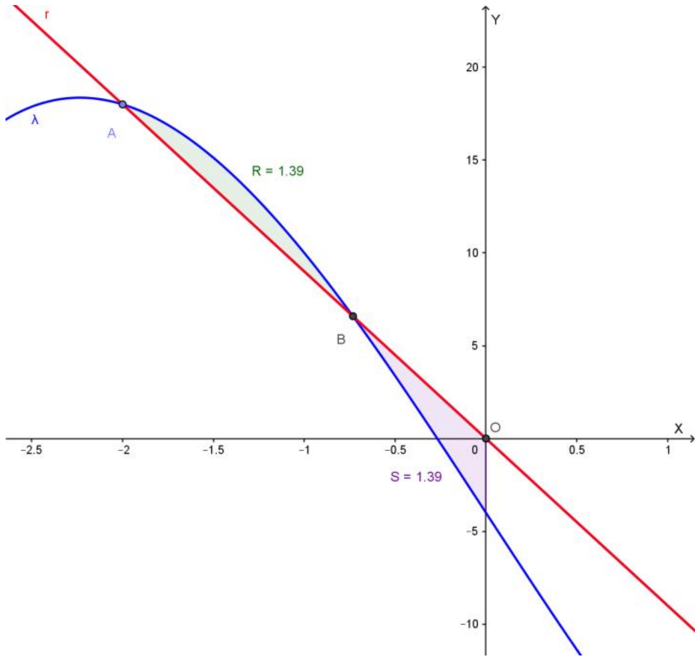
Il grafico della cubica (insieme alla generica retta r) è il seguente:



b)

Si determini m in modo che R ed S siano equivalenti.

Rappresentiamo le due regioni R ed S:



Se le aree di R e di S (che per comodità indichiamo con R ed S) sono uguali, allora deve essere:

$$R=\int_{x_A}^{x_B}(x^3-15x-4-mx)\ dx=\int_{x_B}^{0}[mx-(x^3-15x-4)]\,dx=S$$

Poniamo $x_A=a\ \ ed\ \ x_B=b$. Risulta:

$$R=\int_{a}^{b}(x^3-15x-4-mx)\ dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{15}{2}x^2-4x-\frac{1}{2}mx^2\right]_a^b=$$

$$=\frac{1}{4}b^4-\frac{15}{2}b^2-4b-\frac{1}{2}mb^2-\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{15}{2}a^2-4a-\frac{1}{2}ma^2\right)$$

$$S=\int_{b}^{0}[mx-(x^3-15x-4)]\,dx=\left[\frac{1}{2}mx^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{15}{2}x^2+4x\right]_b^0=$$

$$=-\frac{1}{2}mb^2+\frac{1}{4}b^4-\frac{15}{2}b^2-4b$$

Uguagliando R ed S abbiamo:

$$\frac{1}{4}b^4-\frac{15}{2}b^2-4b-\frac{1}{2}mb^2-\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{15}{2}a^2-4a-\frac{1}{2}ma^2\right)=-\frac{1}{2}mb^2+\frac{1}{4}b^4-\frac{15}{2}b^2-4b$$

$\frac{1}{4}a^4-\frac{15}{2}a^2-4a-\frac{1}{2}ma^2=0,\ \ \frac{1}{4}a(a^3-30a-16-2ma)=0$ da cui $a=0$ che non è

accettabile e $\quad a^3-30a-16-2ma=0\ \ (*)$

Ma il coefficiente angolare m della retta r, è uguale al coefficiente angolare della retta AO, che può essere visto come $\frac{y_A}{x_A}=\frac{a^3-15a-4}{a}=m$; la (*) diventa quindi:

$$a^3-30a-16-2a\frac{a^3-15a-4}{a}=0,\quad -a^3-8=0,\ \ a=-2$$

Per tale valore di a risulta: $m=\frac{a^3-15a-4}{a}=-9$

Il valore richiesto è quindi $m=-9$

c)

Si determini l'equazione della curva simmetrica di λ, rispetto alla retta determinata al punto precedente.

Dobbiamo trovare l'equazione della simmetrica di $\lambda: y=x^3-15x-4$ rispetto alla retta di equazione $y=-9x$.

Detto P=(x; y) il generico punto di λ e P'=(X;Y) il simmetrico rispetto alla retta data, devono essere verificate le seguenti condizioni:

la retta PP' deve essere perpendicolare ad $y=-9x$, quindi:

$$m(PP')=\frac{Y-y}{X-x}=\frac{1}{9}$$

Inoltre il punto medio M di PP' deve appartenere all'asse di simmetria, perciò:

$M=\left(\frac{x+X}{2};\frac{y+Y}{2}\right)$ deve soddisfare $y=-9x$, perciò: $\frac{y+Y}{2}=-9\left(\frac{x+X}{2}\right)$

Le equazioni della simmetria rispetto alla retta in questione si ottengono quindi dal seguente sistema:

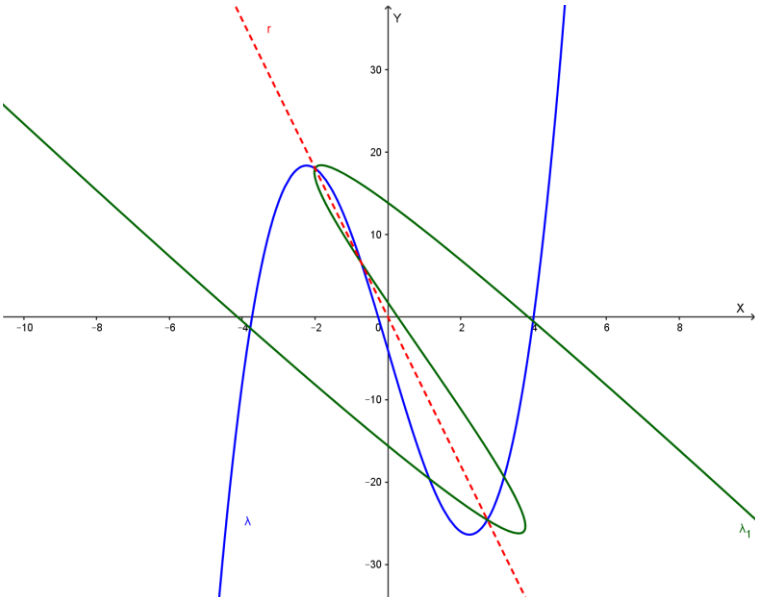
$$\begin{cases} \dfrac{Y-y}{X-x}=\dfrac{1}{9} \\ \dfrac{y+Y}{2}=-9\left(\dfrac{x+X}{2}\right) \end{cases} ; \quad \begin{cases} 9Y-9y=X-x \\ y+Y=-9x-9X \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=X+9y-9Y \\ y+Y=-9X-81y+81Y-9X ; \quad 82y=-18X+80Y ; \quad y=\dfrac{-9X+40Y}{41} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=X+9\left(\dfrac{-9X+40Y}{41}\right)-9Y=\dfrac{360Y-40X-369Y}{41}=\dfrac{-9Y-40X}{41}=x \\ y=\dfrac{-9X+40Y}{41} \end{cases}$$

La curva λ: $y=x^3-15x-4$ diventa quindi:

$$\frac{-9X+40Y}{41}=\left(\frac{-9Y-40X}{41}\right)^3-15\left(\frac{-9Y-40X}{41}\right)-4$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria e Leandro Gobbo