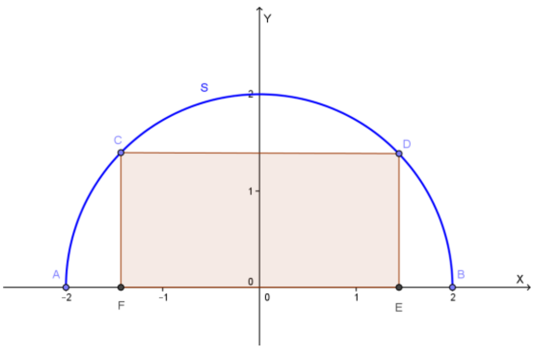
Americhe emisfero australe 2004 – Sessione suppletiva
PROBLEMA 1

Si riferisca il semicerchio S di raggio 2 ad un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche xy e si determinino:

a)

Le dimensioni del rettangolo R di area massima inscritto in S.

Fissiamo il sistema di riferimento come in figura:



Posto $D=(x,y)$, con $0<x<2, 0<y<2 \quad e \;\; x^2+y^2=4$, l'area del rettangolo R è:

$Area=2xy=2x\sqrt{4-x^2}$, che è massima se lo è $x\sqrt{4-x^2}$; essendo tale quantità positiva, essa è massima quando è massimo il suo quadrato: $z=x^2(4-x^2)$

Metodo delle derivate:
$z'=2x(4-x^2)+x^2(-2x)=-4x^3+8x\geq 0 \;\; se \;\; 4x(-x^2+2)\geq 0, \qquad -x^2+2\geq 0,$
$-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}.$

Essendoci la condizione $0<x<2$, la funzione è quindi crescente se $0<x<\sqrt{2}$ e decrescente se $\sqrt{2}<x<2$; pertanto è massima se $x=\sqrt{2}$.

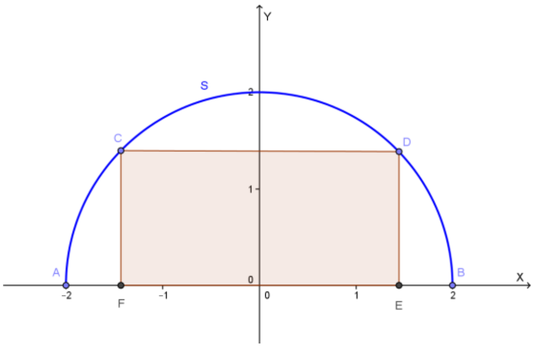
Metodo elementare:
$z=x^2(4-x^2)$ è il prodotto di due quantità a somma costante (4) quindi è massimo se le due quantità sono uguali cioè se: $x^2=4-x^2, x^2=2, \;\; x=\sqrt{2}.$

Il rettangolo R ha area massima è quello di vertici
$E=(\sqrt{2};0), \;\; D=(\sqrt{2};\;\sqrt{2}), \;\; C=(-\sqrt{2};\;\sqrt{2}), \;\; E=(-\sqrt{2};0)$. L'area massima vale 4.

Dimensioni del rettangolo: $ED=\sqrt{2}\;, \;\; EF=2\sqrt{2}$.

b)

L'area di ciascuna delle 3 parti che, insieme ad R, compongono S.



E' sufficiente calcolare l'area del triangolo mistilineo BDE, che si ottiene sottraendo al settore circolare DOB il triangolo DOE. Osserviamo che $OE = DE = \sqrt{2}$, quindi l'angolo DOE misura 45°, pertanto il settore circolare DOB è l'ottava parte del cerchio. Perciò:

$$Area(tr. mist. BDE) = Area(settore\ circ. DOB) - Area(triang. DOE) = \frac{1}{8}(\pi \cdot 2^2) - 1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 = Area(tr. mist. ACF)$$

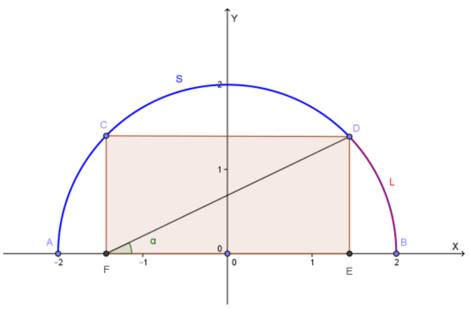
La terza parte richiesta (il segmento circolare di base CD) si ottiene per sottrazione:

$$Area(segm. circ.) = Area(semicerchio) - Area(rettangolo) - 2Area(tr. mist. BDE) =$$

$$= 2\pi - 4 - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2$$

c)

Un'approssimazione in gradi sessagesimali dell'angolo che ciascuna diagonale di R forma con il diametro di S e la misura del corrispondente arco staccato su S.



L'angolo α tra FD ed il diametro AB si ottiene nel modo seguente:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{DE}{FE} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \alpha = tg^{-1}(0.5) \cong$$
$$\cong 0.46\ rad \cong 26.57°$$

L'arco L richiesto è uguale ad $\frac{1}{8}$ della lunghezza della circonferenza, quindi: $L = \frac{1}{8} \cdot 2\pi r = \frac{\pi}{2} \cong 1.57$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria