Scuole italiane all'estero (Europa) 2004 – PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y = ax^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2x}$, *dove a è un parametro reale assegnato.*

a)

Dimostrare che esse passano tutte per uno stesso punto A.

Si tratta di un fascio di curve che può essere scritto nella forma: $y - \frac{1}{2x} - ax\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$, $(x \neq 0)$. Il punto comune a tutte curve si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y - \dfrac{1}{2x} = 0 \\ x - \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2x} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases} : \quad A = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right)$$

b)

Tra le curve assegnate determinare quella che presenta come tangente in A la retta di coefficiente angolare 23/18 .

Da $y = ax^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2x}$ otteniamo: $y' = 2ax - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2x^2}$ e deve essere $y'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{23}{18}$, quindi:

$3a - \frac{3}{2}a - \frac{2}{9} = \frac{23}{18}$, $54a - 27a - 4 = 23$, $a = 1$. La curva richiesta ha quindi equazione:

$$y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x} \ .$$

c)

Dopo aver controllato che la curva K trovata è quella che corrisponde al valore 1 di a, studiarla e disegnarne l'andamento.

Dobbiamo studiare e disegnare la curva K di equazione: $\boldsymbol{y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x}}$.

Dominio: $x \neq 0$: $-\infty < x < 0,\ \ 0 < x < +\infty$.

La funzione non è pari né dispari.

In base al dominio non ci possono essere intersezioni con l'asse y.

Eventuali intersezioni con l'asse x: $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x} = 0,\ 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$; una radice è x=1. Abbassando di grado con la regola di Ruffini abbiamo:

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(2x^2 - x - 1) = 0,\ \ 2x^2 - x - 1 = 0\ \ se\ \ x = 1\ e\ x = -\frac{1}{2}.$$

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x}\right) = +\infty$ (essendo la funzione un infinito di ordine 2 non esistono asintoti obliqui).

$\lim_{x\to 0^{\mp}}\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x}\right) = \mp\infty$: $x = 0$ asintoto verticale.

Derivata prima:

$$y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x}\ ,\ \ y' = 2x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2x^2} \geq 0\ \ se\ \ 4x^3 - 3x^2 - 1 \geq 0$$

$4x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ ha una radice x=1; abbassiamo di grado con Ruffini:

$(x-1)(4x^2 + x + 1) = 0,\ \ 4x^2 + x + 1 = 0\ \ mai$. Quindi:

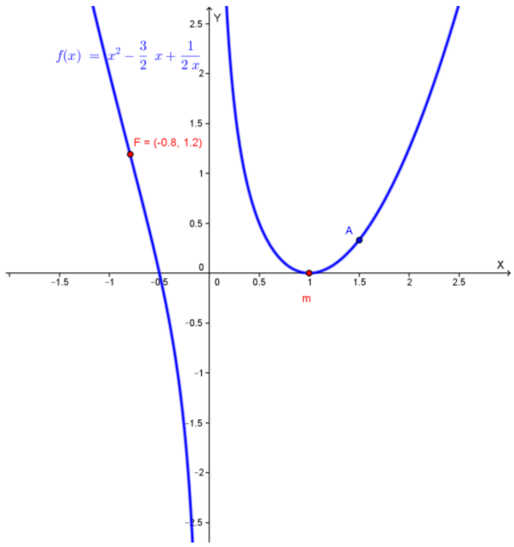
$y' \geq 0\ \ se\ \ x \geq 1$, pertanto la funzione è crescente se x>1, decrescente se x<0 e 0<x<1. x=1 è punto di minimo relativo, con ordinata 0.

Derivata seconda:

$$y'' = 2 - \frac{1}{2}(-2x^{-3}) = 2 + \frac{1}{x^3} \geq 0\ \ se\ \ \frac{2x^3+1}{x^3} \geq 0\ ,\ \ x \leq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\ \ \ or\ \ \ x > 0\ .$$

Il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto se $x < -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\ \ e\ \ x > 0$ e verso il basso se $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < x < 0$; $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ è punto di flesso, con ordinata pari a $\frac{3}{\sqrt[3]{16}} \cong 1.2$.

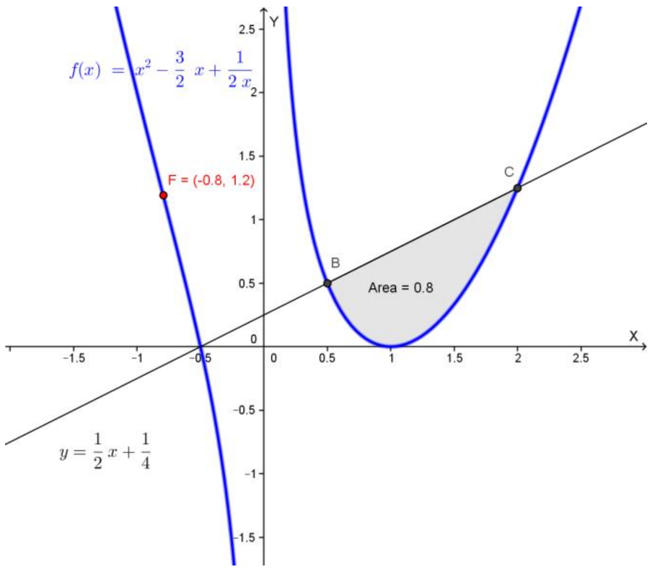
Grafico di K:



d)

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva K e dalla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

La regione è rappresentata nella figura seguente:



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_{x_B}^{x_C} \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x}\right)\right] dx$$

Cerchiamo le intersezioni fra K e la retta data:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x} \end{cases} \quad ; \quad x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \quad ; \quad 4x^3 - 6x^2 + 2 = 2x^2 + x \ ;$$

$$4x^3 - 8x^2 - x + 2 = 0\,; \quad 4x^2(x-2) - (x-2) = 0 \ ; \quad (x-2)(4x^2-1) = 0\!: \ x = 2, x = \pm\frac{1}{2}$$

Quindi:

$x_B = \frac{1}{2}$ $\ e \ $ $x_C = 2$. Pertanto:

$$Area = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[2x + \frac{1}{4} - x^2 - \frac{1}{2x}\right] dx = \left[x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\ln|x|\right]_{\frac{1}{2}}^{2} =$$

$$= 4 + \frac{1}{2} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2}ln2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left[\frac{3}{2} - \ln(2)\right] u^2 \cong 0.81 \ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria