Scuole italiane all'estero (Europa) 2004 – Quesiti

QUESITO 1

Considerata la funzione $f(x) = \frac{sen\, x}{sen\, 2x}$ *, calcolare, qualora esistano, i suoi limiti per* $x \to 0$ *e per* $x \to +\infty$*.*

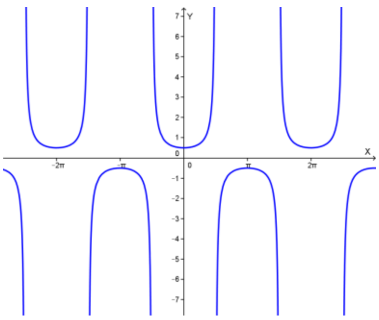
Ricordando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{sen\, 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} \cdot \frac{2x}{sen\, 2x} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Per calcolare il secondo limite osserviamo che per $x \to +\infty$ sen(x) e sen(2x) oscillano fra -1 e 1, quindi il

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{sen\, x}{sen\, 2x} \quad NON\ ESISTE\ .$$

Si può anche osservare che $\frac{sen\, x}{sen\, 2x} = \frac{sen\, x}{2\, sen\, x \cos x} = \frac{1}{2\cos x}$ e questa funzione (oscillando cos(x) fra -1 e 1) non ammette limite per $x \to +\infty$). Notiamo che $y = \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}\sec(x)$ che ha il seguente grafico:



QUESITO 2

Sia f(x) una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^{1/\sqrt{2}} f(x)dx$ *. È allora possibile calcolare il valore di:*

$$[A]\ \int_0^{\sqrt{2}/4} f\left(\frac{x}{2}\right) dx \ ; \quad [B]\ \int_0^{\sqrt{2}/2} f\left(\frac{x}{2}\right) dx \ ; \quad [C]\ \int_0^{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx \ ; \quad [D]\ \int_0^{2\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx \ .$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = I$$

$[A]\quad \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Poniamo $\frac{x}{2} = t,\ \ x = 2t,\ \ dx = 2dt;\ \ \ se\ x = 0, t = 0\ \ \ e\ se\ \ x = \frac{\sqrt{2}}{4},\ \ t = \frac{\sqrt{2}}{8}$. Quindi:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{8}} 2f(t)dt = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{8}} f(t)dt : non\ calcolabile.$$

$[B]\quad \int_0^{\sqrt{2}/2} f\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Poniamo $\frac{x}{2} = t,\ \ x = 2t,\ \ dx = 2dt;\ \ \ se\ x = 0, t = 0\ \ \ e\ se\ \ x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ t = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Quindi:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} 2f(t)dt = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} f(t)dt : non\ calcolabile.$$

$[C]\quad \int_0^{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Poniamo $\frac{x}{2} = t,\ \ x = 2t,\ \ dx = 2dt;\ \ \ se\ x = 0, t = 0\ \ \ e\ se\ \ x = \sqrt{2},\ \ t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi:

$$\int_0^{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2f(t)dt = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(t)dt = 2I:\ calcolabile.$$

Controlliamo che l’integrale [D] non è calcolabile:

$[D]\quad \int_0^{2\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Poniamo $\frac{x}{2} = t,\ \ x = 2t,\ \ dx = 2dt;\ \ \ se\ x = 0, t = 0\ \ \ e\ se\ \ x = 2\sqrt{2},\ \ t = \sqrt{2}$. Quindi:

$$\int_0^{2\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} 2f(t)dt = 2\int_0^{\sqrt{2}} f(t)dt : non\ calcolabile.$$

L’integrale calcolabile è quello del punto [C].

QUESITO 3

Dimostrare la formula che fornisce la somma di n numeri in progressione geometrica.

Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ n numeri in progressione geometrica con ragione q. La loro somma è data da:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad (se\ q = 1, \qquad S_n = na_1).$$

Dimostrazione (ricordiamo che $a_n = a_1 q^{n-1}$)

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} \quad ;$$

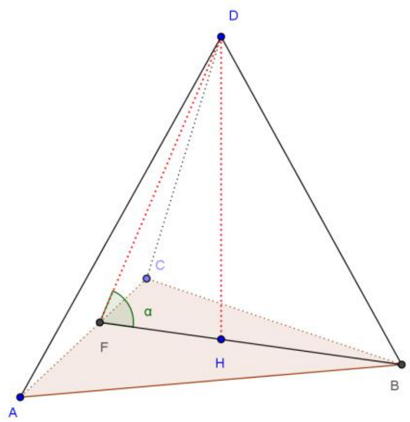
$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^n$$

Sottraendo membro a membro abbiamo:

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1 = a_1(q^n - 1), \quad quindi: \ S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)\,, \ S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

QUESITO 4

Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un tetraedro regolare, misurata in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.



Consideriamo la perpendicolare DF al lato AC; la perpendicolare da B al lato AC cadrà anch'essa su F (piede dell'altezza relativa ad AC in ACD e piede dell'altezza relativa ad AC in ABC).
L'ampiezza dell'angolo diedro formato dalle facce ACD e ABC è uguale all'angolo α formato da DF e BF.
Sia l la misura dello spigolo del tetraedro. DF è l'altezza di un triangolo equilatero di lato l, quindi: $DF = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3}$.

L'altezza DH del tetraedro cade nel centro H della base ABC, che è anche il baricentro del triangolo ABC, quindi (per una nota proprietà del baricentro):
$FH = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{3}BF = \frac{1}{3}DF = \frac{l}{6} \cdot \sqrt{3}.$

Ma allora, considerando il triangolo DFH, rettangolo in H, risulta:

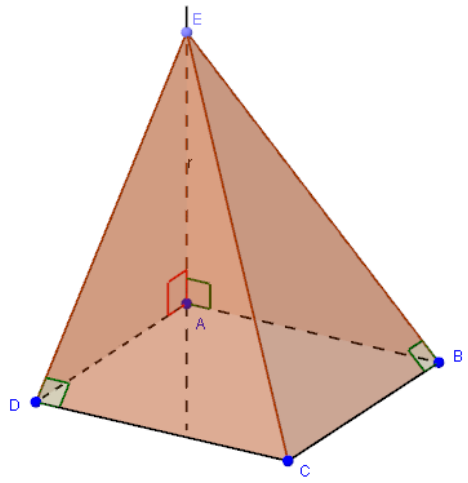
$$FH = DF \cdot cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad cos\alpha = \frac{FH}{DF} = \frac{\frac{l}{6} \cdot \sqrt{3}}{\frac{l}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = arccos\left(\frac{1}{3}\right) \cong 70.5288°$$

Quindi:

$\alpha \cong 70.5288° = 70°31'44''$.

QUESITO 5

La retta r è perpendicolare nel vertice A al piano del quadrato ABCD. Indicato con E un qualsiasi punto di r, distinto da A, dimostrare che le facce laterali della piramide di vertice E e base ABCD sono triangoli rettangoli, a due a due congruenti.



Essendo AE perpendicolare al piano ABCD risulta perpendicolare ad AD e ad AB, quindi i triangoli ADE ed ABE sono rettangoli in A; inoltre sono congruenti poiche hanno AE in comune ed AD congruente ad AB perché lati di un quadrato.

Risulta poi CD perpendicolare ad AD ed AB perpendicolare ad AD. Il piano ABCD è perpendicolare al piano ADE, pertanto CD è perpendicolare ad ED (CD è perpendicolare ad un piano che contiene DE in D, quindi è perpendicolare ad ogni retta di tale piano passante per D): il triangolo CDE è rettangolo in D. In modo analogo si ha che ABCD è perpendicolare al piano ABE, quindi CB è perpendicolare ad EB: il triangolo BCE è rettangolo in B. I due triangoli CDE e BCE sono congruenti poiché hanno in comune l'ipotenusa CE e congruenti i cateti CD e BC (lati di quadrato).

QUESITO 6

Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle indeterminate x, y:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{4} \\ x^3y^3=1 \end{cases}$$

Ogni sua soluzione rappresenta le coordinate di un punto del piano cartesiano (Oxy). Calcolare quanti e quali punti rappresenta il sistema.

Il sistema è simmetrico ed equivale a:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{4} \\ xy=1 \end{cases} ; \begin{cases} (x+y)^2-2xy=\dfrac{17}{4} \\ xy=1 \end{cases} ; \begin{cases} (x+y)^2-2=\dfrac{17}{4} \\ xy=1 \end{cases} ; \begin{cases} (x+y)^2=\dfrac{25}{4} \\ xy=1 \end{cases} ;$$

$\begin{cases} x+y=\pm\frac{5}{2} \\ xy=1 \end{cases}$: abbiamo quindi due sistemi simmetrici:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{2} \\ xy=1 \end{cases} ; \quad t^2-\frac{5}{2}t+1=0,\ 2t^2-5t+2=0: \quad t=\frac{1}{2},\ t=2: \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=-2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-\dfrac{5}{2} \\ xy=1 \end{cases} ;\ t^2+\frac{5}{2}t+1=0,\ 2t^2+5t+2=0:\ t=-\frac{1}{2},\ t=-2 \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Il sistema rappresenta quindi i seguenti **quattro** punti del piano cartesiano:

$$A=\left(\frac{1}{2};2\right), \quad B=\left(2;\frac{1}{2}\right), \quad C=\left(-\frac{1}{2};-2\right), \quad D=\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$$

QUESITO 7

Una classe è formata da 30 alunni, fra i quali Aldo e il suo amico fidato Giacomo. Si deve formare una delegazione costituita da 4 studenti della classe. Calcolare quante sono le possibili quaterne comprendenti Aldo e Giacomo.

Le quaterne con Aldo e Giacomo sono pari al numero delle combinazioni di 28 oggetti a due a due: $C_{28,2}=\frac{28\cdot 27}{2!}=14\cdot 27=378$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria