PNI 2004 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

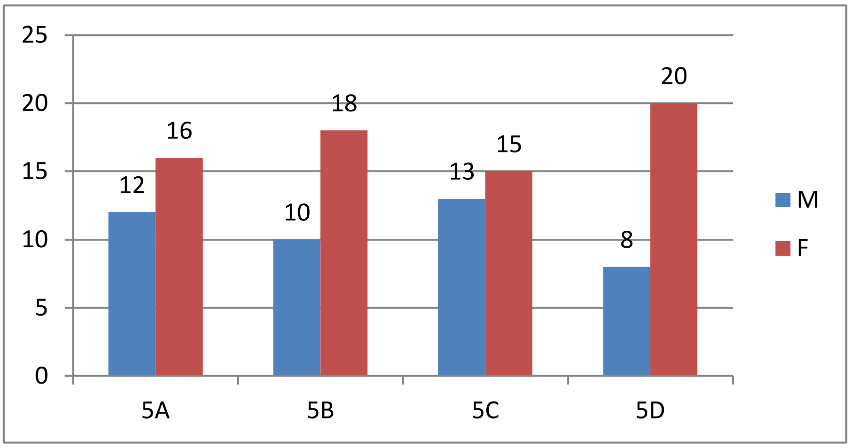
Nel Liceo Scientifico "Torricelli" vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

sesso \ sezione	***A***	***B***	***C***	***D***
M	*12*	*10*	*13*	*8*
F	*16*	*18*	*15*	*20*

a)

Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.

Indichiamo sull'asse delle ascisse le classi e sull'asse delle ordinate in numero di alunni per classe (distinti in maschi e femmine):



b)

Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.

Consideriamo le due variabile aleatorie X ed Y così definite:

X="sesso" ,   Y="sezione"
I valori da esse assunte sono:
X={M,F}, Y={A,B,C,D}

Calcoliamo i valori assunti da p(X) e p(Y), cioè le distribuzioni di probabilità.

Il totale dei maschi è 43 e delle femmine 69; il totale degli alunni è 112; quindi:

$$p(X = M) = \frac{43}{112}, \quad p(X = F) = \frac{69}{112}$$

$$p(Y = A) = p(Y = B) = p(Y = C) = p(Y = D) = \frac{1}{4}$$

Calcoliamo ora le probabilità congiunte delle variabili X ed Y:

$$p(X = M, Y = A) = probabilità\ che\ un\ alunno\ sia\ maschio\ e\ sia\ di\ 5A =$$
$$= p(maschio\ di\ 5A) \cdot p(5A) = \frac{12}{28} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{28}$$

$$p(X = M, Y = B) = probabilità\ che\ un\ alunno\ sia\ maschio\ e\ sia\ di\ 5B =$$
$$= p(maschio\ di\ 5B) \cdot p(5B) = \frac{10}{28} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{56}$$

$$p(X = M, Y = C) = probabilità\ che\ un\ alunno\ sia\ maschio\ e\ sia\ di\ 5C =$$
$$= p(maschio\ di\ 5C) \cdot p(5C) = \frac{13}{28} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{112}$$

$$p(X = M, Y = D) = probabilità\ che\ un\ alunno\ sia\ maschio\ e\ sia\ di\ 5D =$$
$$= p(maschio\ di\ 5D) \cdot p(5D) = \frac{8}{28} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{14}$$

$$p(X = F, Y = A) = probabilità\ che\ un\ alunno\ sia\ femmina\ e\ sia\ di\ 5A =$$
$$= p(femmina\ di\ 5A) \cdot p(5A) = \frac{16}{28} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{7}$$

$$p(X = F, Y = B) = probabilità\ che\ un\ alunno\ sia\ femmina\ e\ sia\ di\ 5B =$$
$$= p(femmina\ di\ 5B) \cdot p(5B) = \frac{18}{28} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{56}$$

$$p(X = F, Y = C) = probabilità\ che\ un\ alunno\ sia\ femmina\ e\ sia\ di\ 5C =$$
$$= p(femmina\ di\ 5C) \cdot p(5C) = \frac{15}{28} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{112}$$

$$p(X = F, Y = D) = probabilità\ che\ un\ alunno\ sia\ femmina\ e\ sia\ di\ 5D =$$
$$= p(femmina\ di\ 5D) \cdot p(5D) = \frac{20}{28} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{28}$$

Possiamo raccogliere i dati nella seguente tabella:

Y / X	A	B	C	D	Somma
M	*3/28*	*5/56*	*13/112*	*1/14*	*43/112*
F	*1/7*	*9/56*	*15/112*	*5/28*	*69/112*
Somma	*¼*	*¼*	*¼*	*¼*	

Le somme delle colonne ci danno le distribuzioni marginali degli alunni per sezione, le somme delle righe sono invece le distribuzioni marginali degli alunni per sesso.

Notiamo che le probabilità congiunte non sono il prodotto delle probabilità marginali, quindi le due variabili non sono indipendenti.

c)

Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5A, questa sia formata da alunni di sesso: 1) maschile, 2) femminile, 3) differente. Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?

Il numero di coppie possibili con studenti di 5A sono pari alle combinazioni di 28 oggetti a 2 a 2:

$$C_{28,2} = \binom{28}{2} = \frac{28 \cdot 27}{2!} = 378$$

Il numero di coppie possibili con studenti maschi di 5A sono pari alle combinazioni di 12 oggetti a 2 a 2:

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2!} = 66$$

Quindi: $p(MM) = \frac{66}{378} = \frac{11}{63}$

Il numero di coppie possibili con studenti femmine di 5A sono pari alle combinazioni di 16 oggetti a 2 a 2:

$$C_{16,2} = \binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2!} = 120$$

Quindi: $p(FF) = \frac{120}{378} = \frac{20}{63}$

Per sottrazione troviamo la probabilità che la coppia sia formata da alunni di sesso differente:

$$p(MF) = 1 - \frac{11}{63} - \frac{20}{63} = \frac{32}{63}$$

d)

Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.

La probabilità di scegliere una classe è uguale ad ¼ . Calcoliamo la probabilità che in ogni classe la coppia di studenti sia di sesso differente, ragionando come fatto nel punto precedente.

Classe 5A: $p(MF)=\frac{32}{63}$

Classe 5B: $p(MF)=1-p(MM)-p(FF)=1-\frac{C_{10,2}}{C_{28,2}}-\frac{C_{18,2}}{C_{28,2}}=1-\frac{5}{42}-\frac{17}{42}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

Classe 5C: $p(MF)=1-p(MM)-p(FF)=1-\frac{C_{13,2}}{C_{28,2}}-\frac{C_{15,2}}{C_{28,2}}=1-\frac{13}{63}-\frac{5}{18}=\frac{65}{126}$

Classe 5C: $p(MF)=1-p(MM)-p(FF)=1-\frac{C_{8,2}}{C_{28,2}}-\frac{C_{20,2}}{C_{28,2}}=1-\frac{2}{27}-\frac{95}{189}=\frac{80}{189}$

La probabilità richiesta è data da:

$$p=\frac{1}{4}\cdot\frac{32}{63}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{21}+\frac{1}{4}\cdot\frac{65}{126}+\frac{1}{4}\cdot\frac{80}{189}=\frac{727}{1512}\cong 0.48=48\%$$

e)

Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5D.

La probabilità che l'alunno, maschio, provenga dalla 5D è data dal rapporto tra il numero dei maschi della quinta D (8) ed il numero totale dei maschi (43):

$$p=\frac{8}{43}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri