PNI 2004 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

La funzione $f(x)=\frac{3x-2sinx}{2x-3sinx}$ *è, per* $x\to+\infty$, *una forma indeterminata del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$*. Il limite della funzione, per* $x\to+\infty$:

A) Non esiste; B) è 3/2; C) è 2/3 ; D) è un valore diverso da 3/2 e 2/3.

Per $x\to+\infty$ $3x-2sinx\sim3x$ poiché 3x è un infinito e 2sinx è una funzione limitata; per lo stesso motivo $2x-3sinx\sim2x$, quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2sinx}{2x-3sinx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

La risposta esatta è quindi la B).

QUESITO 2

Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n}k$ *non supera 10000.*

$$\sum_{k=5}^{n}k=5+6+\cdots+n=\frac{(5+n)(n-5+1)}{2}=\frac{(5+n)(n-4)}{2}=\frac{n^2+n-20}{2}$$

Infatti si tratta della somma dei primi n-4 termini di una progressione aritmetica di ragione 1 con primo termine 5.
Ricordiamo infatti che la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica con primo termine a_1 e ultimo termine a_n è data da $\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Deve essere $\frac{n^2+n-20}{2}\leq10000$, $n^2+n-20\leq20000$, $n^2+n-20020\leq0$;
le radici dell'equazione associata a tale disequazione sono:

$n=\frac{-\sqrt{80081}-1}{2}\cong-141.99$ ed $n=\frac{\sqrt{80081}-1}{2}\cong140.99$
La disequazione è quindi verificata per: $\frac{-\sqrt{80081}-1}{2}\leq n\leq\frac{\sqrt{80081}-1}{2}\cong140.99$
Quindi il massimo valore di n è 140.

Notiamo che se n=140 risulta $\sum_{k=5}^{n}k=9860$ mentre se n=141 risulta $\sum_{k=5}^{n}k=10001$.

QUESITO 3

Sia F(x) una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se F'(a)>0 allora F(x) è crescente in a, mentre se F'(a)<0 allora F(x) è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché F(x) ammetta in a un massimo relativo è che risulti F'(a)=0 ed F"(a)<0.

Supponiamo che F'(a)=0 ed F"(a)<0 e dimostriamo che F(x) ha un massimo relativo in x=a.

In base alla formula di Taylor risulta:

$$F(x) = F(a) + (x-a) \cdot F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} F''(a) + R_2$$

con R_2 trascurabile rispetto a $\frac{(x-a)^2}{2!} F''(a)$. Quindi, essendo $F'(a) = 0$ si ha che, in un intorno di x=a, $F(x) - F(a) \cong \frac{(x-a)^2}{2!} F''(a) \leq 0$ e ciò vuol dire che in un intorno di x=a risulta $F(x) \leq F(a)$: ciò vuol dire che x=a è un punto di massimo relativo.

La condizione non è necessaria: come controesempio consideriamo la funzione di equazione $F(x) = -x^4$ che ha un massimo relativo in x=0 eppure F''(0)=0 , quindi non è F''(a)<0.

QUESITO 4

Risolvere la seguente disequazione in x: $(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$ *.*

Affinché esista lnx deve essere $x > 0$ quindi $\ln(x^2) = 2ln|x| = 2lnx$. Pertanto la disequazione diventa:

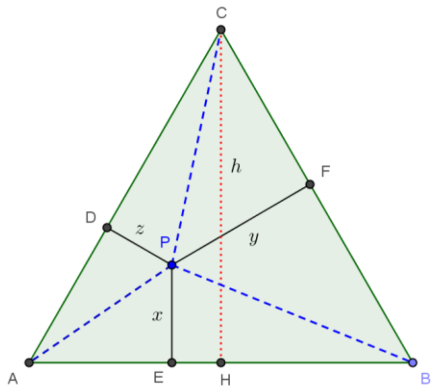
$$(\ln x)^2 \geq 2\ln x, \quad (\ln x)^2 - 2\ln x \geq 0\,, \quad lnx(lnx - 2) \geq 0, \quad lnx \leq 0 \quad vel \quad lnx \geq 2$$

Quindi:

$lnx \leq 0$: $0 < x \leq 1$
$lnx \geq 2$: $x \geq e^2$

QUESITO 5

Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma x+y+z risulta:
[A] sempre maggiore di h;
[B] sempre minore di h;
[C] sempre uguale ad h;
[D] a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.



Indicato con L il lato del triangolo equilatero ABC, risulta:

$$Area(ABC) = L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ma risulta anche:

$$Area(ABC) = Area(APB) + Area(BCP) + Area(ACP) = \frac{L \cdot x}{2} + \frac{L \cdot y}{2} + \frac{L \cdot z}{2} = \frac{L}{2}(x + y + z)$$

Pertanto:

$$\frac{L}{2}(x + y + z) = L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Longrightarrow \quad x + y + z = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = h$$

La risposta corretta è quindi la *[C]* .

QUESITO 6

Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

Si tratta di una conica (in particolare di un'iperbole) che possiamo scrivere nella forma:

$$y = \frac{-px - r}{x + q}$$

Questa conica (funzione omografica) è degenere se:
$-p(q) - (-r)(1) = 0\,, \quad -pq + r = 0\,, \quad r = pq$

In tal caso la conica assume la forma:

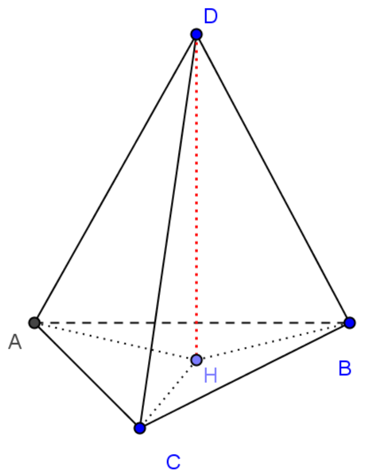
$xy + px + qy + pq = 0\,,\quad x(y+p) + q(y+p) = 0\,,\quad (y+p)(x+q) = 0$

Quindi, se $r = pq$, la conica si spezza nelle rette di equazioni:

$y + p = 0 \;\; e \;\; x + q = 0$ (con p e q non contemporaneamente nulli)

QUESITO 7

Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.



Consideriamo per esempio il vertice D: esistono due rotazioni intorno all'altezza DH che mutano il triangolo ABC in se stesso ed hanno ampiezze di 120° e 240°. Considerando analogamente gli altri tre vertici A, B e C, in totale abbiamo 8 rotazioni che mutano il tetraedro in se stesso.
Esistono poi altre tre rotazioni (di 180°) che hanno per assi di rotazione le rette che congiungono i punti medi di due spigoli opposti (AC e BD, AB e CD, BC e AD).
Infine possiamo considerare come isometria che muta il tetraedro in se stesso anche l'identità.

In totale ci sono quindi 12 isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in se stesso.

QUESITO 8

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \frac{1}{2}bx - 2 \end{cases}$$

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto (1;0) nel punto (1;−1) e stabilire se ammette rette unite.

Affinché il punto (1;0) si trasformi nel punto (1;-1) deve essere:

$$\begin{cases} 1 = a \\ -1 = \frac{1}{2}b - 2 \end{cases} \quad quindi: \quad a = 1 \quad e \quad b = 2$$

L'affinità richiesta ha quindi equazioni:

$$\begin{cases} X = x + 2y \\ Y = x - 2 \end{cases}$$

Per trovare le eventuali rette unite consideriamo la retta r' di equazione $AX + BY + C = 0$ ed imponiamo che si trasformi in se stessa; la sua trasformata r ha equazione:

$$A(x + 2y) + B(x - 2) + C = 0 \quad , \quad (A + B)x + 2Ay - 2B + C = 0$$

Le due rette r ed r' coincidono se:

$$\frac{A + B}{A} = \frac{2A}{B} = \frac{C - 2B}{C} = k$$

$$\begin{cases} \frac{A + B}{A} = k \\ \frac{2A}{B} = k \\ \frac{C - 2B}{C} = k \end{cases} \; ; \; \begin{cases} A + B = kA \\ 2A = kB \\ C - 2B = kC \end{cases} \; ; \; \begin{cases} \frac{kB}{2} + B = k\frac{kB}{2} \\ A = \frac{kB}{2} \\ C - 2B = kC \end{cases} \; ; \; \begin{cases} kB + 2B = k^2 B \\ A = \frac{kB}{2} \\ C - 2B = kC \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo B=0 oppure $k + 2 = k^2$, $k^2 - k - 2 = 0 : k = 2 , k = -1$

Se B=0 risulta anche A=0 e C=0, quindi non è accettabile.

Se $k = 2$:

$\begin{cases} A = B \\ C - 2B = 2C \end{cases}$; $\begin{cases} A = B \\ C = -2B \end{cases}$ quindi è unita la retta di equazione: BX+BY-2B=0 che

equivale a: X+Y-2=0.

Se $k = -1$:

$\begin{cases} A = -\frac{1}{2}B \\ C - 2B = -C \end{cases}$; $\begin{cases} A = -\frac{1}{2}B \\ C = B \end{cases}$; quindi è unita la retta di equazione: (-1/2)BX+BY+B=0

che equivale a: X-2Y-2=0.

QUESITO 9

Due giocatori, A e B, giocano a "Testa o Croce" con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Ciascuno di loro punta la somma S. Chi vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola: «Il giocatore A lancia la moneta: se esce "Testa" vince, altrimenti il gioco passa a B. Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene "Croce", in caso contrario il gioco ritorna ad A, che ripete il lancio e vince se viene "Testa". In caso contrario il gioco ripassa a B, che vince se viene "Croce". Se B non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due giocatori riprende la somma che aveva puntato». Il gioco è equo?

Ricordiamo che un gioco è equo se, a parità di puntata S, la probabilità di vincere è uguale alla probabilità di perdere; inoltre, per essere il gioco equo, la puntata deve essere proporzionale alla probabilità di vincita.

Lancia A: probabilità ½ di vincere; se vince ritira la posta ed il gioco finisce, altrimenti:
lancia B: probabilità ½ di vincere; se vince ritira la posta ed il gioco finisce, altrimenti:
lancia A: probabilità ½ di vincere; se vince ritira la posta ed il gioco finisce, altrimenti:
lancia B: probabilità ½ di vincere; se vince ritira la posta ed il gioco finisce, altrimenti ogni giocatore ritira la somma puntata.

A può vincere al primo turno, con probabilità $p = \frac{1}{2}$ oppure al terzo turno con probabilità $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Quindi la probabilità di vincita di A è $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

B può vincere al secondo turno con probabilità $p = \frac{1}{4}$ oppure al quarto turno con probabilità $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. Quindi la probabilità di vincita di B è $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

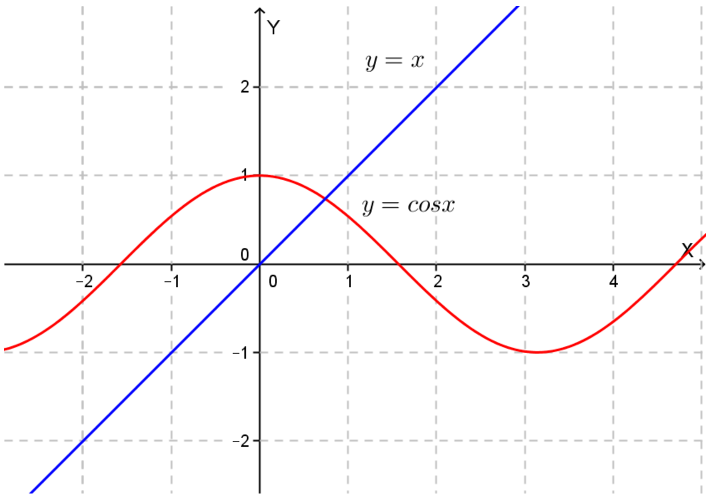
Le due probabilità non sono uguali, quindi, essendo le puntate dei due giocatori uguali, il gioco non è equo; per esserlo, dato che la probabilità di vincita di A è doppia di quella di B, A dovrebbe puntare il doppio di B.

QUESITO 10

Dopo avere spiegato perché la funzione $f(x) = \frac{1}{x - cosx}$ *è positiva nell'intervallo [1, 2], esplicitare un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato dell'area situata sotto il grafico della funzione relativamente all'intervallo considerato.*

$f(x) > 0 \quad se \quad x - cosx > 0 \quad cioè\ se \quad x > cosx$.

Risolviamo la disequazione graficamente, rappresentando nello stesso sistema di riferimento le curve di equazioni $y = x \quad e \quad y = cosx$.



Dal grafico si vede chiaramente che nell'intervallo [1;2] risulta $x > cosx$, quindi la funzione è positiva.

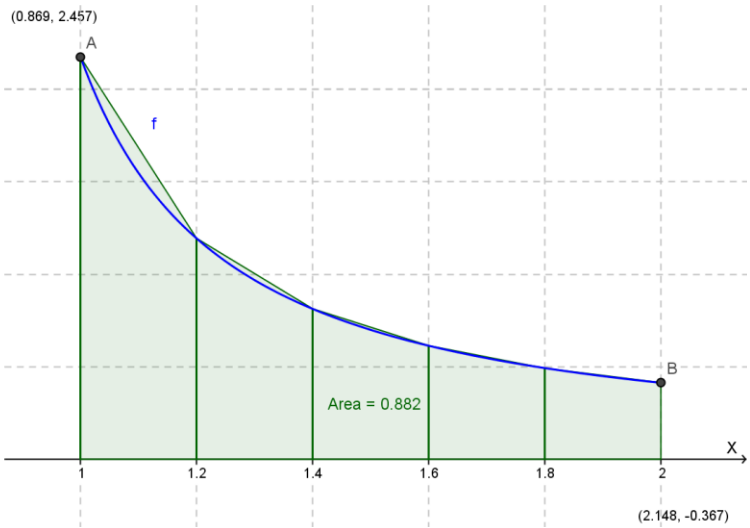
Essendo la funzione positiva nell'intervallo suddetto, l'area richiesta è data da:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Tale integrale può essere calcolato, per esempio, con il metodo dei trapezi. Dividendo l'intervallo [1;2] in n parti di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$, risulta:

$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$.

Dividiamo, per esempio, l'intervallo in n=5 parti.



$$\int_1^2 \left[\frac{1}{x - cosx}\right] dx \cong h\left[\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right]$$

Dove: $h = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad x_0 = 1,\ x_1 = 1 + h = 1.2\,,\ x_2 = 1.4,\ x_3 = 1.6,\ x_4 = 1.8,\ x_5 = 2$

$$\int_1^2 \left[\frac{1}{x - cosx}\right] dx \cong 0.2 \cdot \left[\frac{f(1) + f(2)}{2} + f(1.2) + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8)\right] =$$

$$= 0.2 \cdot \left[\frac{2.175 + 0.414}{2} + 1.194 + 0.813 + 0.614 + 0.493\right] = 0.882$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri