ORDINAMENTO 2004 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y = \frac{1+a\, senx}{\cos x}$ *dove a è un parametro reale.*

a)

Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π*, che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.*

Ricordando che le funzioni seno e coseno hanno periodo 2π, essendo la funzione data il quoziente di due funzioni con periodo 2π ha anch'essa periodo 2π.
Ricordiamo che se due funzioni hanno periodo A e B ed il minimo comune multiplo di A e B è un multiplo intero di A e B, allora tale minimo comune multiplo è il periodo della somma, del prodotto e del quoziente delle due funzioni.

Cerchiamo i punti comuni alle curve date al variare del parametro reale a.
Le curve possono essere scritte nella forma:

$$y\, cosx - 1 - a\, senx = 0$$

che può essere considerato un fascio di curve con generatrici

$$y\, cosx - 1 = 0 \quad e \quad senx = 0$$

Gli eventuali punti comuni a queste due curve saranno comuni a tutte le curve del fascio.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{cosx} \\ senx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = k\pi \end{cases} \quad con\ k\ intero\ relativo$$

Al variare di a quindi le curve date hanno in comune infiniti punti.

b)

Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione, dopo aver notato che è derivabile per ogni x reale, tranne quelli per cui $cosx = 0$, quindi per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $con\ k\ intero\ relativo$.

Risulta:

$$y' = \frac{a\, cosx(cosx) - (a\, senx + 1)(-senx)}{\cos^2 x} = \frac{a + senx}{\cos^2 x} = 0 \quad se \quad senx = -a$$

I punti a tangente orizzontale hanno quindi coordinate $\left(x,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, con $senx = -a$; quindi:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + a\, senx}{\cos x} = \frac{1 - a^2}{cosx} \quad da\ cui \quad cosx = \frac{1 - a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

In base alla relazione goniometrica fondamentale $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ sarà quindi:

$$(-a)^2 + \left(\frac{1 - a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = 1 \quad da\ cui\!: \ a^2 + \frac{4}{3}(1 - a^2)^2 = 1,\ \ 3a^2 + 4(1 - 2a^2 + a^4) - 3 = 0$$

$$4a^4 - 5a^2 + 1 = 0 \quad da\ cui \quad a^2 = 1 \quad e\ a^2 = \frac{1}{4}\ , \qquad quindi\ \ a = \pm 1 \quad e\ a = \pm\frac{1}{2}$$

Se $a = \pm 1$, da $senx = -a$ otteniamo $senx = \pm 1$ $\quad da\ cui \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (esclusi dal dominio).

Se $a = \pm\frac{1}{2}$, da $senx = -a$ otteniamo $senx = \pm\frac{1}{2}$ $\quad da\ cui \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$

quindi abbiamo due curve che soddisfano la richiesta, per $a = \pm\frac{1}{2}$

Le curve richieste hanno equazioni:

$$y = \frac{1 + a\, senx}{\cos x} = \frac{1 + \frac{1}{2}\, senx}{cosx} = \frac{2 + senx}{2cosx} = y$$

$$y = \frac{1 + a\, senx}{\cos x} = \frac{1 - \frac{1}{2}\, senx}{cosx} = \frac{2 - senx}{2cosx} = y$$

c)

Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \le x \le \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

Dimostriamo che le due curve trovate nel punto precedente sono simmetriche rispetto all'asse y. Ricordiamo che la simmetrica rispetto all'asse y della curva di equazione y=f(x) ha equazione y=f(-x).

Nel nostro caso poniamo:

$$f(x) = \frac{2 + senx}{2cosx} \quad e \quad g(x) = \frac{2 - senx}{2cosx}$$

Risulta:

$$f(-x) = \frac{2 + sen(-x)}{2\cos(-x)} = \frac{2 - senx}{2cosx} = g(x)$$

Quindi le due curve sono simmetriche rispetto all'asse y.

Studiamo la funzione

$$f(x) = \frac{2 + senx}{2cosx} \quad in \quad -\pi \le x \le \pi$$

Dominio:

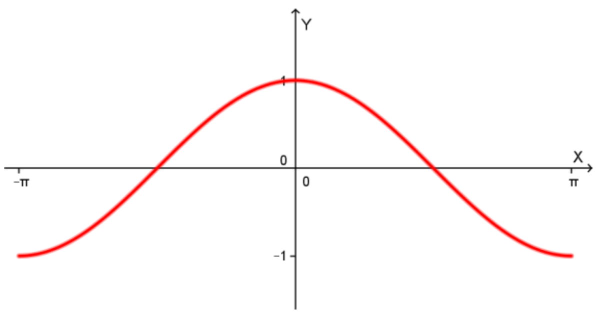
$$cosx \neq 0 \quad da\ cui \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2}: \quad -\pi \le x < -\frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{2} < x \le \pi$$

Intersezioni con gli assi:

Se x=0: y=1 ; se y=0 2+senx=0: mai.

Segno della funzione:

Siccome il numeratore della funzione è sempre positivo, la funzione è positiva dove è positivo il denominatore, quindi, osservando il grafico della funzione seno nell'intervallo di studio:



$$f(x) > 0 \ se: \ cosx > 0 \quad da\ cui \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Limiti:

Osserviamo che agli estremi del dominio la funzione assume il valore $f(\pm\pi) = -1$

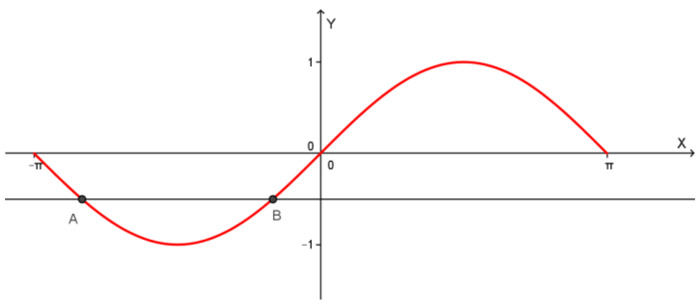
$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{2+senx}{2cosx} = -\infty \; ; \quad \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{2+senx}{2cosx} = +\infty : \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad asintoto\ verticale$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{2+senx}{2cosx} = +\infty \; ; \quad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{2+senx}{2cosx} = -\infty : \quad x = \frac{\pi}{2} \quad asintoto\ verticale$$

Derivata prima:

$$f'(x) = D\left(\frac{2+senx}{2cosx}\right) = \frac{(1+2\operatorname{sen} x)}{2\cos^2 x} \geq 0 \quad se \quad senx \geq -\frac{1}{2} \; ;$$

risolviamo l'equazione graficamente:



Risulta $senx \geq -\frac{1}{2}$ se $-\pi \leq x \leq -\frac{5}{6}\pi \quad e \quad -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \pi$
Quindi la funzione è crescente se
$-\pi \leq x < -\frac{5}{6}\pi \quad e \quad -\frac{\pi}{6} < x \leq \pi$ e decrescente nella parte rimanente del dominio.
Abbiamo un massimo relativo se $x = -\frac{5}{6}\pi$ (con ordinata $f\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$) ed un minimo relativo se $x = -\frac{\pi}{6}$ (con ordinata $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Derivata seconda:

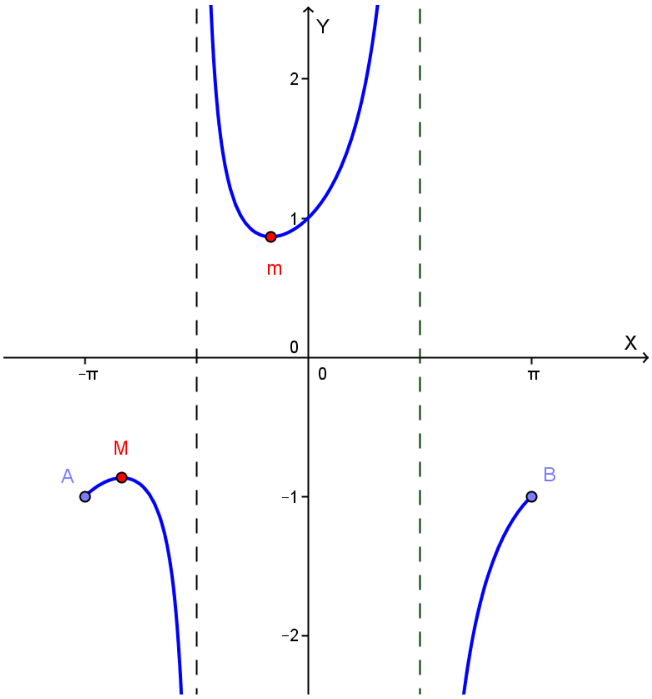
$$f''(x) = \frac{sen^2x + senx + 1}{2\cos^3 x} \geq 0 \quad se\ cosx > 0$$

Infatti in numeratore (avendo il delta<0) è sempre positivo. Quindi:

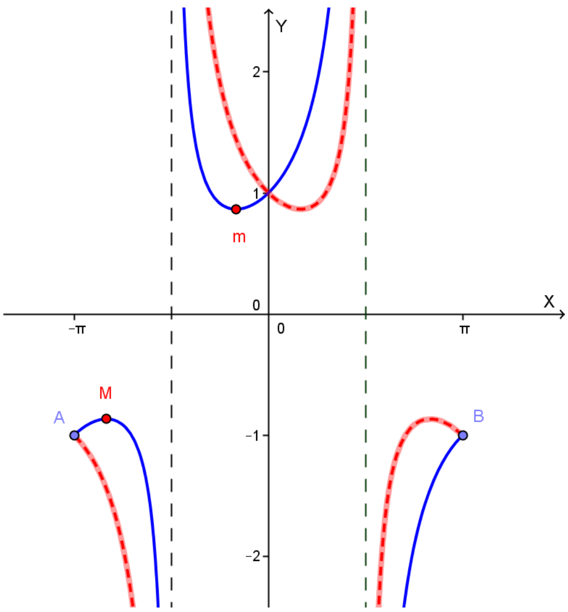
$f''(x) \geq 0 \quad se \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; pertanto il grafico volge la concavità verso l'alto se

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e verso il basso nella parte rimanente del dominio. Non esistono flessi.

Il grafico della funzione $f(x) = \frac{2+senx}{2cosx} \quad in \quad -\pi \leq x \leq \pi$ è il seguente:



Le due curve richieste sono indicate insieme nel seguente grafico:



Con la collaborazione di Angela Santamaria