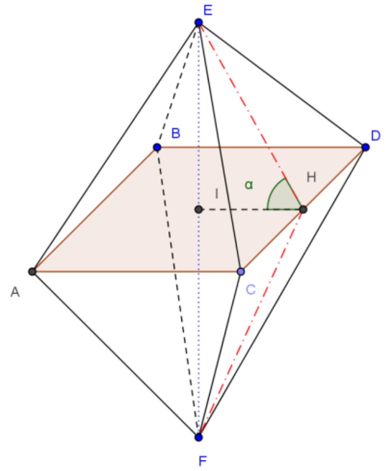
ORDINAMENTO 2004 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.



L'angolo diedro corrisponde all'angolo EHF, che è il doppio di α. Il triangolo EHI, rettangolo in I, ha il cateto IH che è metà dello spigolo s dell'ottaedro e l'ipotenusa EH che è l'altezza della faccia CDE, triangolo equilatero di lato s, quindi:

$$IH = \frac{s}{2}, \quad EH = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad IH = EH \cdot cos\alpha \quad da\ cui \quad cos\alpha = \frac{IH}{EH} = \frac{\frac{s}{2}}{s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Pertanto:

$$\alpha = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.955\ rad = 54.736° = 54°44'10"$$

Quindi l'angolo diedro richiesto misura $2\alpha = 109°28'20"$

QUESITO 2

Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
Si può concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Siano $\alpha\ e\ \beta$ due piani perpendicolari. Scegliamo un sistema di assi cartesiani orogonali nello spazio in modo che i due piani coincidano con il piano xy e con il piano xz rispettivamente; le lo ro equazioni sono quindi:

α: $z = 0$, β: $y = 0$

I due piani hanno in comune l'asse x, che ha equazioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Consideriamo una generica retta r perpendicolare ad uno dei due piani, per esempio ad α. Osserviamo che una terna di parametri direttori di α sono (0,0,1), quindi la retta r avrà parametri direttori proporzionali, la sua equazione è pertanto del tipo:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c + t \end{cases}$$

Dobbiamo dimostrare che r è parallela al piano β o appartiene ad esso.

Una terna di parametri direttori di quest'ultimo piano è: (0,1,0). La condizione di parallelismo fra piano e retta ci dice che la somma dei prodotti dei parametri direttori deve essere uguale a zero, quindi:

$0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$: ciò dimostra che r è parallela a β. In particolare, se il punto (a,b,c) appartiene a questo piano, cioè se b=0, la retta r giace sul piano.

Non è detto, invece, che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro. Per esempio la retta s di equazioni:

$$\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$ è parallela ad α ; infatti una terna di parametri direttori di α è (0,0,1) ed una terna di parametri direttori di s è (1,1,0); la somma dei prodotti dei parametri direttori è zero, quindi s è parallela ad α .
Però s non è perpendicolare a β: i parametri direttori di questo piano sono, come già detto, proporzionali a (0,1,0) mentre quelli della retta s sono proporzionali a (1,1,0), quindi non sono tra di loro proporzionali.

QUESITO 3

Determinare il dominio della funzione $f(x) = ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

Affinché la funzione sia definita deve essere: $x \geq 0 \quad e \quad 1 - 2x + \sqrt{x} > 0$.

La seconda disequazione è equivalente a: $\sqrt{x} > 2x - 1$.
Le soluzioni di questa disequazione equivalgono alle soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$a)\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \; 0 \leq x < \frac{1}{2} \qquad b)\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > (2x-1)^2 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda disequazione dl sistema b):

$4x^2 - 5x + 1 < 0 \quad , \quad \frac{1}{4} < x < 1$
Quindi, tornando al sistema b):

$$b)\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \; \frac{1}{2} \leq x < 1$$

L'unione delle soluzioni dei due sistemi è: $0 \leq x < 1$

Tenendo presente la condizione $x \geq 0$ il dominio è: $0 \leq x < 1$.

QUESITO 4

Il limite di tgx per x tendente a +∞:

A) è +∞; *B) è* $\frac{\pi}{2}$ *;* *C) non esiste;* *D) esiste ma non si riesce a calcolare.*

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

La funzione $y = tgx, \; per \; x \longrightarrow +\infty$ oscilla tra $-\infty$ e $+\infty$, quindi non può ammettere limite.
Se esistesse un limite finito L, in un intorno di +∞ (cioè per x>k) la funzione dovrebbe essere contenuta in una striscia orizzontale di mediana L e ampiezza piccola a piacere, e ciò, per quanto detto sull'oscillazione della funzione, non è possibile. In modo analogo

non può esistere il limte $+\infty$ o $-\infty$, perché per x>k la funzione dovrebbe essere sempre maggiore di un numero a piacere M o minore di –M: ed anche ciò è impossibile per l’oscillazione della funzione.

La risposta corretta è la C).

QUESITO 5

Dimostrare il seguente teorema: «Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale f (x) sia continua nel punto a è che sia derivabile in a».

Cominciamo a dimostrare che se una funzione è derivabile in un punto x_0 allora è ivi continua.

In base alla definizione di derivabilità risulta:

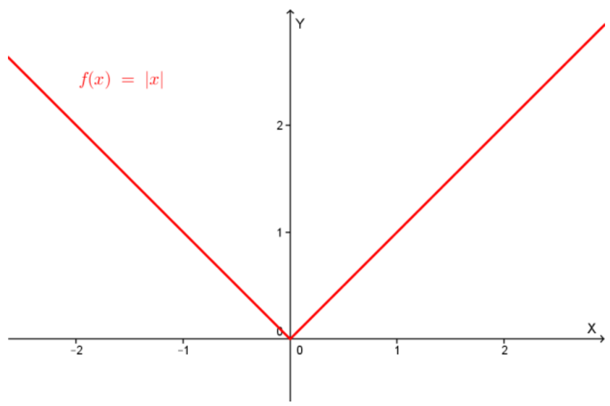
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\quad finito$$

Segue che:

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h=\lim_{h\to 0}f'(x_0)\cdot h=0$$

E ciò equivale a dire che la funzione è continua in x_0 .

Viceversa, se una funzione è continua in un punto, non è detto che sia ivi derivabile; un semplice esempio è fornito dalla funzione $y=f(x)=|x|$, che è continua in x=0, ma non derivabile (in particolare abbiamo un punto angoloso, con derivata destra pari a 1 e derivata sinistra pari a -1).



QUESITO 6

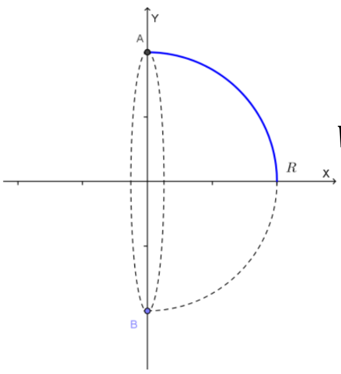
Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare la formula che fornisce il volume di una sfera di raggio assegnato.

Ricordiamo che il volume della sfera di raggio R è dato da:

$$V(sfera) = V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Per dimostrare tale formula mediante il calcolo integrale osserviamo la semisfera di raggio R può essere ottenuta facendo ruotare un quarto del cerchio con centro in O e raggio R intorno all'asse x. La circonferenza contorno di tale cerchio ha equazione:

$$x^2 + y^2 = R^2$$



La semisfera generata dalla rotazione del quarto di cerchio del primo quadrante ha volume:

$V =$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^R y^2 dx = \pi \int_0^R (R^2 - x^2)dx =$$
$$= \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R = \pi \left[R^3 - \frac{1}{3}R^3\right] = \frac{2}{3}\pi R^3$$

La sfera ha quindi volume: $V(sfera) = 2\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

QUESITO 7

Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica, di primo termine ½ e ragione ½ , calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.

Risulta:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

QUESITO 8

Calcolare il valore della seguente somma: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$.

E' nota la seguente relazione (che si può dimostrare, per esempio, per induzione):

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Quindi, per n=100 abbiamo:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot (100+1) \cdot (200+1) = \frac{50}{3} \cdot 101 \cdot 201 = 338350$$

QUESITO 9

In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti.

Le possibili terne di rappresentanti si ottengono calcolando le combinazioni di 25 oggetti a 3 a 3:

$$C_{25,3} = \binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = 25 \cdot 4 \cdot 23 = 2300$$

QUESITO 10

Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici fra i primi tre classificati.

Le possibilità che Antonio e Pietro siano tra i primi 3 sono le seguenti:

$A - P - (6\ possibilità)$, $\quad P - A - (6\ possibilità)$, $\quad A - (6\ possibilità) - P$

$P - (6\ possibilità) - A$, $\quad (6\ possibilità) - A - P$, $\quad (6\ possibilità) - P - A$

In totale si hanno quindi 6x6=36 possibili ordini di arrivo.

Con la collaborazione di Angela Santamaria