PNI 2004 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto a una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo 1/2. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a)

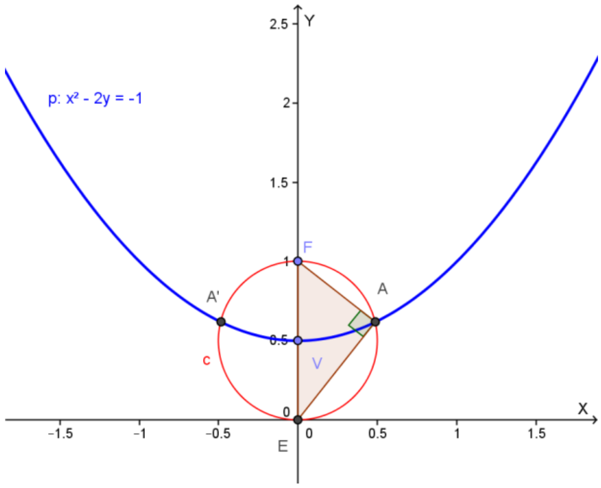
determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A.

Indicato con E l'origine degli assi cartesiani e con FV l'asse delle y orientato da V verso F (vedi figura), la parabola ha vertice $V = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ e fuoco $F = (0; 1)$. La sua equazione è quindi del tipo:

$$y = ax^2 + \frac{1}{2}$$

Imponiamo che l'ordinata del fuoco valga 1: $\frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1+2a}{4a} = 1,\ da\ cui:\ \ a = \frac{1}{2}$

La parabola ha quindi equazione $p: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ ed il suo grafico è il seguente:



Gli eventuali punti A della parabola tali che il triangolo AVF sia retto in A sono gli eventuali punti di intersezione della circonferenza di diametro EF con la parabola stessa. Di tali punti, come si vede graficamente, ce ne sono due (simmetrici rispetto all'asse delle y).

b)

Chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p.

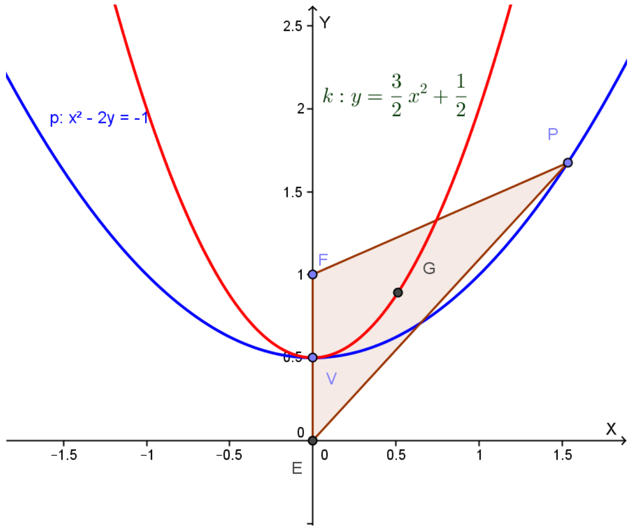
Il punto generico P della parabola p ha coordinate del tipo $P = \left(t; \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\right)$, dove t è un parametro reale. Le coordinate del baricentro G del triangolo PEF sono:

$x_G = \frac{x_P + x_E + x_F}{3}$, $y_G = \frac{y_P + y_E + y_F}{3}$, quindi il luogo ka ha equazioni parametriche:

$$k: \begin{cases} x = \frac{1}{3}(t + 0 + 0) = \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + 0 + 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{2} \end{cases};$$

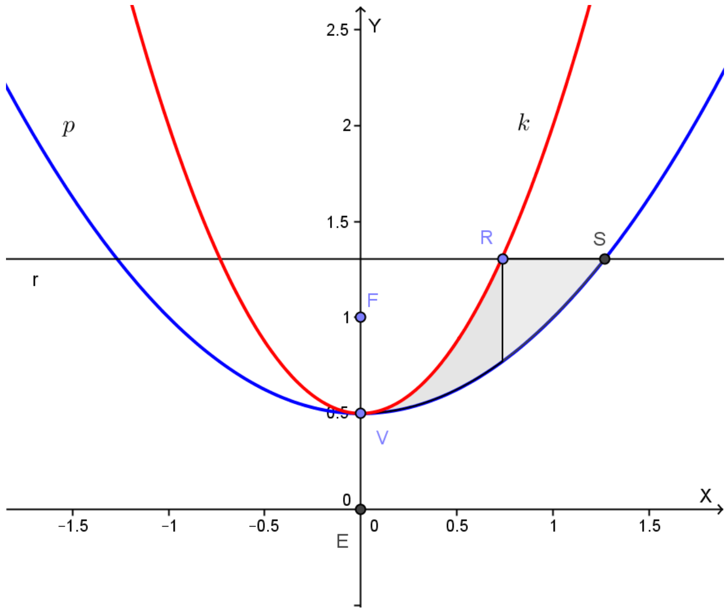
Per trovare l'equazione cartesiana del luogo k eliminiamo il parametro t fra le due equazioni:

$$t = 3x\,, \quad y = \frac{1}{6}(9x^2) + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$



c)

Indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p e il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}\left(3 - \sqrt{3}\right)$.



In dicata con h la distanza della retta r da O, la sua equazione è y=h (con h>1/2). E' utile esprimere le parabole (per x>0) nelle seguenti forme:

$$p\colon\ y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\quad\Longrightarrow\quad x=\sqrt{2y-1}$$

$$k\colon\ y=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\quad\Longrightarrow\quad x=\sqrt{\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}}$$

Utilizzando queste equazioni l'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area=\int_{\frac{1}{2}}^{h}\left(\sqrt{2y-1}-\sqrt{\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}}\right)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{h}\left(\sqrt{2y-1}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dy=$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{h}2\left(\sqrt{2y-1}\right)dy=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\cdot\left[\frac{(2y-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{h}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}\cdot(2h-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(2h-1)^3}=\frac{8}{9}\left(3-\sqrt{3}\right)$$

Da cui:

$$\sqrt{(2h-1)^3}=\frac{8}{9}\cdot\frac{3\sqrt{3}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{8}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}-3}{\left(\sqrt{3}-1\right)}=8$$

Elevando al quadrato:

$$(2h-1)^3 = 64 \quad \Longrightarrow \quad 2h-1=4 \quad \Longrightarrow \quad h=\frac{5}{2}$$

La distanza di r da V è quindi h-1/2, cioè:

$$distanza\ (r,V) = h-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$$

d)

Stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

La distanza trovata sopra, pari a 2, è chiaramente un numero razionale.

Con la collaborazione di Angela Santamaria